ELIZA ROMAN

Arina în Țara Numerelor

editura SCRIPTA
București
2008

COLECȚIA *INFOTECA*

ELIZA ROMAN

ARINA ÎN ȚARA NUMERELOR

CENTRUL EDITORIAL „CICERO E“

DIRECTOR FONDATOR AL EDITURII „SCRIPTA“
OCTAVIAN ȘTIREANU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ROMAN, ELIZA
Arina în țara numerelor / Eliza Roman ;
ed. îngrij. de conf. univ. dr. Nicolae Rauș ;
pref.: acad. Mircea Malița. - București : Scripta, 2008
Bibliogr.
Index.
ISBN 978-973-8238-23-7

I. Rauș, Nicolae (ed.)
II. Malița, Mircea (pref.)

51

ELIZA ROMAN

ARINA ÎN ȚARA NUMERELOR

Ediție îngrijită de
conf. univ. dr. NICOLAE RAUȘ

Prefață
Acad. MIRCEA MALIȚA

editura SCRIPTA
București
2008

Coordonator colecție: **dr. Nicolae Rauș**
Redactor de carte: **Dinu Moraru**
Tehnoredactare: **CICERO GRUP**
Pre-press: ing. **Adrian Antofe**

Reproducerea, transmiterea sau difuzarea, sub orice formă
sau prin orice mijloace cunoscute sau viitoare, a textelor cuprinse
în volumul de față sunt permise numai cu acordul scris
al Editurii „Scripta", care are toate drepturile rezervate.

© Editura „Scripta", 2008
Calea Victoriei, nr. 39A
București

ISBN 978-973-8238-23-7

CUPRINS

Acad. Mircea Malița: **Prefață** 7
„La început a fost numărul“ 9
Concursul „Galaxia Numerelor“ 11
Campanie electorală la Televiziunea Numerelor 12
Candidați cu șanse la președinție 13
Numărul 3 – simbolul Creației 13
Numărul 7 – dintotdeauna în top 17
Φ – misteriosul Număr de Aur 22
Buclucuri matematice 31

Secvențe de istorie 35
Ionuț află despre apariția numerelor 35
Omul a numărat înainte de a vorbi 39

Prin cluburi 40
Asociația Iubitorilor Numărului 40
La Clubul Primelor Zece Numere 41
La Clubul Prieteniei 54
Elita numerelor 55
Carismaticul π pe post de amfitrion 56
În prelungirea discuției de la Club: Numărul *e* 64

Sisteme de numerație 67
Cu șapte hieroglife egiptenii numărau până la un milion . .67
De la bobul de cacao la glifa aztecă 74
Sistemul acrofonic grecesc 78
Cum numărau strămoșii romani? 80

Numerațiile alfabetice – un imens pas în istorie 84
O asociere ingenioasă a literelor și numerelor la evrei . . .85

Impactul numerației grecești 86
Numerația arabă privește spre Europa 90

Numerațiile de poziție 94
Începutul a fost în Sumer 94
Fantezia mayașilor 102
Dinamismul numerației chineze 112
Indienii notau ușor numere mari 120
Itinerarul numerației la români 128

Numere remarcabile 136
Creația pitagorică 136
Numere *p-adice* 139

Statutul de număr se obține greu 143
Există numere iraționale? 143
Numere negative – numere fictive 149
Numărul *i* – „un amfibiu între existență și neant“ 151
Numere transcendente 156
Numărul care nu-și dezvăluie natura 159
Triumful lui zero 160

Interogații vechi și noi 164
Numere prime 164
Ipoteza lui Riemann – problema mileniului 169
Marea provocare a lui Gödel 171
Legenda lui Fermat 175
Conjecturi năbădăioase 176
Ființe matematice magice 179
Numerele prime și criptografia 182
Numere aproape prime 182
Fișierul problemelor celebre 184
Pot, oare, numerele să asigure onestitatea? 186

Arina este fericită! 193

Index de termeni 195

Bibliografie selectivă 205

PREFAȚĂ

Arina m-a luat cu ea în Țara Numerelor, după un cuvânt bun din partea autoarei. Mai fusesem acolo, dar să nu subestimezi niciodată un ghid tânăr din generația calculatoarelor. Am văzut locuri noi și am revăzut altele vechi.

Într-o formație matematică găsești rar un curs de teoria numerelor. Am dat odată de un manual de teoria numerelor de pe timpul lui Haret, admirabil prin eleganță și rigoare, scris în mod evident pentru școlile de fete. În facultăți, disciplinele și-au format arii proprii, expropriind terenul de obârșie al numerelor, regăsite vag în algebră și ascunse sub noi simboluri și extensii, în toate domeniile matematicii și științelor.

Evident, „la început a fost numărul“*, nu cuvântul, căci numărul fără cuvânt s-a mulțumit cu niște degete. Istoria lui este nu doar istoria matematicii, dar și a gândirii abstracte și, mai presus de toate, a civilizației globale. Emanciparea lui abstractă este o istorie dramatică. După numerele întregi sacre și armonioase, grecii au fost sfidați de pătratul perfect, a cărui diagonală era un număr ce nu avea sfârșit.* ***„Se spune*** *– scrie Proclus –* ***că cei care pentru prima dată au scos la iveală iraționalele din ascuns la vedere au pierit în naufragiu până la unul. Căci inexprimabilul și cel fără formă trebuie să stea ascuns. Și cei care au dezvăluit și au atins această imagine a lumii au fost distruși subit și vor rămâne expuși pentru vecie jocului eternelor valuri“****. Era o adevărată tragedie grecească. Cuvintele au generat culturi, care s-au dezvoltat cu o altă familie de simboluri ce au permis comunicare umană și transmisiunea credințelor și valorilor de la o generație la alta. Culturile*

au stiluri proprii cu care definesc specificitatea și identitatea locală. Cunoștințele sunt exprimate acum în simboluri abstracte scoase din ascunzișuri, circulă liber, sunt transmisibile și asimilabile în spațiul universalității.

Înghesuite de discipline mari – algebră, geometrie, analiză –, teoria și istoria numărului reintră pe scenă. Stephen Hawking, fizicianul care ne-a fermecat cu cărțile lui, publică lucrarea sa **Dumnezeu a creat întregii** *pornind de la citatul lui Kronecker, care adaugă* ***„restul este opera omului"****. În peste 1 000 de pagini, începe cu Euclid și cu Arhimede și termină cu giganții secolului trecut, Gödel și Turing, în total 17 matematicieni, cu biografiile și lucrările lor. În subtitlu, scrie* ***Deschiderile matematice care au schimbat istoria****. De ce nu îl include și pe Euler? – mă întreabă Arina. Pentru că ea mă conduce la piatra pe care e sculptată miraculoasa Ecuație a lui Euler:* $e^{i\pi} = -1$*, unde își dau întâlnire trei numere* e, i *și* π*, tot atât de frumoasă și compactă ca Ecuația lui Einstein:* $e = mc^2$*. Fără* e, i *și* π *omul n-ar zbura în atmosferă, n-ar trimite rachete în spațiu, n-ar construi poduri suspendate și nici zgârie-nori.*

Locul numărului în civilizație îmi trezește o idee: n-ar trebui, oare, să punem puterea calculatorie a omului la un loc cu puterea de energie instalată, în definirea capacității unei societăți de a fi parte din civilizația globală? Arina mă corectează: pe lângă că ideea îi desemnează un rol nou, ea e atrasă de număr pentru aura sa de mister ce trebuie lămurită. S-a inventat, oare, un joc mai fascinant și mai captivant care să dea emoții egale cu ale poeziilor sau melodiilor celor mai extaziante? Ca și ele, jocul numerelor are ceva miraculos, pasionant, irezistibil. Îi mulțumesc cu căldură ei, autoarei și editorului pentru călătoria inspirată.

Acad. MIRCEA MALIȚA

„LA ÎNCEPUT A FOST NUMĂRUL“

Înzestrat cu un mare potențial de organizare a lumii, numărul a fost asociat dintru început cu bogăția și cu puterea, iar pe de altă parte i-a fascinat atât pe gânditori, cât și pe oamenii de rând. Mitul numărului a cuprins, în Vechime, mai toate popoarele și a dăinuit îndelung. În evoluția lui, numărul a cunoscut epoci de glorie și de latență, însă a continuat să fie permanent prezent în viața omului. Virtuțile lui explică bogăția de tipuri apărute și marea diversitate a categoriilor inventate. Numărul suscită interesul în ceea ce privește geneza și tipologia lui, frământările pe care le-a iscat, cât și impactul lui asupra vieții cotidiene, a științei, tehnicii și chiar a artei.

Cărticica de față nu-și propune să îmbrățișeze toate aspectele în care se implică numărul. Scopul ei este să realizeze, într-o manieră accesibilă, un periplu în „Țara Numerelor“, făcând apel la cunoștințe de cultură generală și de matematică elementară.

Cititorul va avea prilejul să intre în contact cu numerele care se întâlnesc cel mai des, numere despre care vorbește Biblia, ca și oamenii de afaceri, numere despre care se pomenește în mitologie, ca și în tehnică, numere folosite în manualele școlare, ca și în artă etc. El va afla povestea unor numere care i-au stârnit curiozitatea și care i-au preocupat îndelung pe predecesorii noștri. Numărul va fi martorul unor adevărate drame generate de pasiunea celor care urmăreau găsirea soluțiilor corecte, de obsesii, de aventuri celebre ce se întind pe sute, chiar pe mii de ani.

Am expus, firește, mai pe larg sistemele de numerație la diferite popoare: sistemele primitive bazate pe juxtapunerea semnelor, sistemele contrase, contopite, sistemele alfabetice, precum și cele

de poziție, mărturie a ingeniozității și imaginației oamenilor. În context, au fost menționate probleme celebre și probleme nerezolvate legate de numere.

În final, am inclus, pentru uzul cititorului tânăr, un ***Index de termeni,*** *care va ușura, credem, înțelegerea expunerii noastre.*

La distanța a 2500 de ani față de Pitagora, care credea că numerele sunt ***„singurele în stare să se aproprie de legile naturii, pe care numai înțelegându-le le putem stăpâni!“****, îi recunoaștem numărului valoarea universală, nu însă și pe aceea de panaceu.*

Adresez și pe această cale vii mulțumiri doamnei prof. univ. dr. ***Afrodita Iorgulescu****, matematician de prestigiu, pentru revizuirea textului și pentru sugestii; doamnei dr. în filologie* ***Viorica Prodan****, pentru ideea elaborării acestei cărți și pentru generoasa stimulare a demersului nostru; domnului* ***Mihai Niculescu****, pentru excelenta „încărcătură“ documentară pusă nouă la dispoziție cu atâta solicitudine; pictorului* ***Stelian Neicu****, pentru rigoarea și acuratețea desenelor și, nu în ultimul rând, domnului dr. inginer* ***Teodor Popa****, pentru revizuirea indexului de termeni.*

Iulie 2008

AUTOAREA

CONCURSUL „GALAXIA NUMERELOR“

Profesorul Matei Iorgulescu aduce la cunoștință elevilor din clasa a XI-a că Asociația Olimpicilor organizează concursul „Galaxia Numerelor“, în Capitală, la 15 aprilie a anului viitor. Doritorii se pot înscrie până la sfârșitul anului curent. Premiul cel mare va fi o excursie în Marea Britanie, țara lui Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) – matematicianul și scriitorul îndrăgit de copii, el fiind cel care a semnat, sub pseudonimul Carroll Lewis, fascinanta poveste *Alice în Țara Minunilor.*

La cină, Arina le împărtășește părinților intenția ei de a se înscrie la concurs. Toată lumea e de acord. Ionuț, frățiorul Arinei, se lamentează că nu are drept de participare, tocmai el, care este un fan al lui Lewis. Mai e mult până la concurs, dar și foarte mult de învățat, fiindcă numerele stăpânesc un teritoriu imens.

Arina este și ea agitată. Trece de miezul nopții și încă nu adoarme. Îl ia în pat pe Pufi, cățelușul ei, care încearcă să o liniștească. În sfârșit, Arina ațipește. În vis, îl vede pe Pufi.

– Ce ar fi să mergem să vizităm Țara Numerelor! – îi propune Pufi.

– Cum să mergem – îi replică Arina –, când nu avem nici bani, nici bilete de călătorie și când am, zi de zi, școală?

Pufi insistă. Într-un târziu, o convinge și cei doi poposesc în Țara Numerelor.

CAMPANIE ELECTORALĂ LA TELEVIZIUNEA NUMERELOR

Arina deschide televizorul. Este aidoma celui din camera ei.

„De ieri, am intrat în campania electorală pentru alegerile generale din această toamnă“ – anunță crainicul.

Lupta se dă între Partidul Numerelor Naturale, Partidul Numerelor Fracționare și Partidul Numerelor Negative. Celelalte partide încă nu și-au lansat platforma (Partidul Numerelor Iraționale, Partidul Numerelor Transcendente, Partidul Numerelor Pitagorice ș.a.). Partidele fac multă zarvă electorală. Se laudă cât pot și aruncă în adversari cu noroi.

Partidul Numerelor Naturale, având ca membri pe 1, 2, 3, 4, 5, … n…, de fapt cel mai vechi partid, este convins că, fiind înzestrat de Divinitate să fie cel mai apropiat de natură, este și cel mai bun, singurul capabil să ofere siguranță și prosperitate.

Partidul Numerelor Fracționare se consideră mai dinamic, mai tânăr, mai deschis progresului. El disprețuiește Partidul Numerelor Naturale, pe care-l socotește mai primitiv, mai conservator, nu totdeauna capabil să rezolve o împărțire în numere naturale. Un partid care nu se poate descurca nici la împărțirea lui 2 cu 3!

Partidul Numerelor Negative se declară, de asemenea, superior Partidului Numerelor Naturale, deoarece poate rezolva orice scădere în numere întregi, chiar și atunci când scăzătorul depășește valoarea descăzutului. Aripa Numerelor Negative Fracționare clamează, la rândul ei, virtuțile care o caracterizează în raport cu Partidul Numerelor Fracționare (Pozitive).

În așteptarea platformelor celorlalte partide, care se autoproclamă elita, s-a trecut la formarea de alianțe. Se poartă tratative între

Partidul Numerelor Naturale și Partidul Numerelor Întregi Negative, pentru o *Alianță a Numerelor Întregi*. Se vorbește și despre o alianță care se va numi *Coaliția Numerelor Raționale*, formată din toate numerele întregi și din cele fracționare.

Pentru emisiunea următoare, se promit informații proaspete despre celelalte formațiuni politice, iar pentru a doua zi o emisiune specială, în care vor fi prezentați candidații la Președinție.

Candidați cu șanse la președinție

Pentru funcția de președinte candidează mai multe numere. Potrivit ultimelor sondaje, șanse mai mari au numerele 3 și 7.

Numărul 3 este președinte de mulți ani, dar ar vrea să fie în continuare. Numărul 7, deși frecvent nominalizat, nu a câștigat niciodată președinția și visează la ea.

În seara precedentă confruntării dintre candidați pe micul ecran, numerele 3 și 7 și-au definitivat pledoariile.

Iată cum au gândit:

Numărul 3 – simbolul Creației

„Eu am fost dintotdeauna în topul numerelor. Totul este supus ternarului, fie spațiu, timp, natură, materie, fie viață, om, hrană și câte altele. Știința, morala, folclorul îmi sunt, la rândul lor, profund îndatorate.

Nu mai insist că atunci când vine vorba despre timp se spune trecut, prezent, viitor. Când se pomenește despre starea materiei, gândul ne duce la stările solidă, lichidă, gazoasă. Prin cei trei termeni: mineral, vegetal, animal, se evocă tot ce există în natură. Termenului existență i se asociază termenii: naștere, creștere,

moarte. Ca vârstă, omul nu poate fi decât de trei feluri: copil, adult sau bătrân. Spațiul în care trăim este tridimensional, camera în care copilul își face temele are lungime, lățime, înălțime.

Să conchid, apoi, că la baza lucrurilor stau: materia, energia, informația. Toți școlarii știu că între numere nu pot funcționa decât trei tipuri de relații: mai mare (>), egal (=) și mai mic (<), că gramatica vorbește despre trei categorii de persoane (I, a II-a și a III-a) și de diatezele activă, pasivă, reflexivă. Investigăm trei niveluri semiotice: sintacticul, semanticul și pragmaticul. Filosofia se folosește de: teză, antiteză și sinteză. Silogismul este format din: premisa majoră, premisa minoră și concluzia. În sfârșit, potrivit medicului austriac Sigmund Freud (1856-1939) – fondatorul psihanalizei –, viața mentală se bazează pe trei polarități: subiect–obiect; plăcere–suferință; activ–pasiv.

Toate acestea au fost pe larg înfățișate de ilustrul matematician român Solomon Marcus, cunoscut pentru ineditul și subtilitatea contribuțiilor sale de lingvistică matematică și semiotică. Să mergem mai departe: în viziunea marelui filosof grec Aristotel (384-322 î.e.n.), denumit și Stagiritul – după locul de naștere –, comunicarea publică îndeplinește trei funcții: 1. politică sau deliberativă; 2. forensică sau juridică; 3. epideică sau demonstrativă. Tot Aristotel susține că, pentru a fi credibil, un orator trebuie să posede: 1. bun-simț; 2. moralitate; 3. bunăvoință.

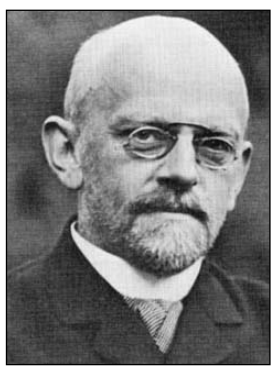
Să nu uităm că logicianul polonez Jan Lukasiewicz (1878-1956) a adăugat celor două valori ale logicii lui Aristotel – adevărat și fals – o a treia, pe cea de îndoielnic. Modelarea algebrică a logicii trivalente a lui Lukasiewicz a condus la crearea de către matematicianul român Grigore C. Moisil (1906-1973) a unei puternice școli naționale și internaționale de algebră a logicii.

Trei componente are și vestita teză a filosofului și matematicianului francez René Descartes (1596-1650), și anume: 1. Dubito (Mă îndoiesc); 2. Ergo cogito (Deci cuget); 3. Cogito, ergo sum (Cuget, deci exist).

Universalitatea mea e recunoscută în toate domeniile drept criteriu de clasificare. Iată un exemplu din sociologie. Tipurile: 1. al resurselor; 2. al modalității folosirii acestora; 3. al tehnologiilor utilizate caracterizează diferitele societăți. Astfel, societatea preindustrială se distingea prin: 1. materiile prime; 2. extragerea acestora; 3. munca intensivă; societatea industrială se bazează pe: 1. energie; 2. fabricare; 3. capital intensiv; iar societatea postindustrială este marcată de: 1. informare; 2. transformare; 3. cunoaștere intensivă.

Și o ilustrare din istorie: unul dintre întemeietorii filosofiei istoriei, italianul Giambattista Vico (1668-1744), consideră că toate popoarele trec prin trei stadii de dezvoltare, corespunzătoare celor trei vârste ale omului: „vârsta zeilor", în care domnesc religia și preoții; „vârsta eroilor", în care apare statul aristocratic; și „vârsta oamenilor", adică era rațiunii și a statului democratic.

Să scot în evidență că cele trei tipuri principale de axiomatizare a teoriilor sunt: 1. axiomatica intuitivă (de exemplu, cea a geometriei euclidiene); 2. axiomatica abstractă – cea folosită de matematicianul german David Hilbert (1862-1943), în care sensul termenilor este determinat exclusiv prin relațiile lor din cadrul axiomelor; 3. axiomatica formalizată (din matematică, integral formalizată).



David Hilbert

În comunicare, sunt esențiale: 1. emițătorul; 2. receptorul; 3. mesajul.

Codonul – unitate constitutivă a moleculei de ADN – are lungimea trei (este format, de obicei, din trei baze nucleice). Ținând seama că natura codonului este chimică, iar aminoacizii reprezintă unitățile de bază ale eredității, se poate afirma că trecerea de la chimie la nivelul genetic este guvernată de numărul 3.

Dacă voi enumera toate domeniile în care sunt implicat, îi voi obosi pe alegători. O să

mai amintesc că, în domeniul teoriei jocurilor strategice, trecerea de la jocurile cu două persoane la cele cu trei persoane i-a deschis matematicianului american John Nash (n. 1928) drumul spre decernarea Premiului Nobel, în 1994. Aplicarea conceptului introdus de Nash a asigurat Statelor Unite mari succese economice și, implicit, fabuloase câștiguri financiare.

O spun cu toată modestia că, în ciuda dușmanilor mei, care sunt suporterii Numărului 7, eu, Numărul 3, reprezint desăvârșirea. Chinezii au recunoscut de mult această virtute a mea!

Mai trebuie să observ că 3 este primul număr impar din șirul numerelor naturale, că el se regăsește pretutindeni în Univers, în Dumnezeu, ca și în om.

Fig. 1. ***Antonio Canova: Cele Trei Grații (Charite)***

Triada: bine – adevărat – frumos este permanent evocată de către oameni.

Gingășia și feminitatea sunt legate de Numărul 3. Cele Trei Grații, cum le numeau romanii, sau Charite, în rostirea grecilor, erau seducătoarele divinități care o întovărășeau pe Zeița Dragostei.

Să atrag atenția și asupra perfecțiunii mele, căci am și început, și mijloc, și sfârșit; asupra frumuseții mele etice: gândul bun, vorba bună, fapta bună stau la baza moralei – spuneau vechii persani.

Triada reprezintă marea obsesie a mitologiilor. În mitologiile mai vechi arabe se vorbește despre existența a trei Lumi de Dincolo: Paradisul, Infernul și un fel de Purgatoriu. În concepția brahmană, sufletul Universului depinde de trei principii esențiale:

reîncarnarea, karma și datoria. Buddhismul evocă trinitatea divină Trimurti (în sanscrită tri = trei, murti = divinități). Brahmanismul admite triada supremă: Brahma, cel care guvernează crearea Universului; Vishnu, principiu al conservării; Șiva, principiu al distrugerii – și proclamă că unirea omului cu Divinitatea se dobândește prin: acțiune, devotament și meditație. Să menționez că Buddha în sanscrită înseamnă atât de poetic: înflorit; trezit; iluminat.

Pentru creștini, 3 reprezintă unitatea Dumnezeirii (Dumnezeu–Tatăl, Dumnezeu–Fiul și Sfântul Duh). Sfânta Treime este esența divină unică în trei persoane. Există trei religii monoteiste: iudaică, creștină, islamică.

*În folclorul românesc, 3 este mult folosit: «*Trei sute de oi; Cu trei ciobănei; De trei zile încoace*»* (Miorița) *sau «*Cu trei femei de fecior; Cu trei funii de mătase; De trei zile bea deplin; S-au băut trei butoaie de vin; De trei palme lat în frunte/ Și nu prea vorbește multe*»* (Gruia în Țarigrad) *sau* «Și mergea, mergea/ Trei feciori cu ea/ La izvoare reci/ Trei feciori de greci» (Fata și cucul). *În poveștile cu Făt-Frumos se zice «*A mers trei zile și trei nopți»; «S-a luptat cu balaurul trei zile și trei nopți*»"*…

Și tot evocând argumente favorabile alegerii sale, Numărul 3 adoarme…

Numărul 7 – dintotdeauna în top

Numărul 7 a meditat și el, în acea noapte cam răcoroasă de septembrie, la pledoaria sa:

„Trei conduce de atâta amar de vreme treburile Țării Numerelor – spune el – *și n-a făcut mare scofală. Peste tot, lipsuri, dezordine, haos… E bătrân și depășit de vremuri. Nu înțelege și nu se poate adapta la orizontul mileniului al treilea. Țara are nevoie de schimbare. Schimbarea benefică o pot oferi doar eu, Șapte.*

Numărul 3 și-a dat întotdeauna aere; eu n-am făcut-o, deși sunt tot atât de nobil ca și el, poate chiar mai mult. Am o componență mai substanțială. În vreme ce 3 este constituit din 1+2 sau 1+2x1, 7 este format din 1+2x1+2x2 sau 1+2+4 sau $2^0+2^1+2^2$. Elegantă formulă! Totul atestă superioritatea mea față de 3! Nu sunt eu strămoșul a două ramuri deosebit de importante ale matematicii moderne? Problema celor 7 poduri din Königsberg, care cere să se afle dacă un pieton poate traversa o dată și numai o dată fiecare dintre cele șapte poduri din Königsberg în plimbarea sa, a fost rezolvată prin negație de Euler și a condus la crearea topologiei și a teoriei grafurilor.

Ați auzit, sunt sigur, de piramida psihologului american Harold Abraham Maslov (1908-1970) privind nevoile omenești. Este alcătuită din 7 trepte: 1. nevoile fiziologice (hrană, adăpost, repaus, viață sexuală); 2. nevoia de securitate (echilibru emoțional în muncă, în viață etc.); 3. nevoile sociale (de atașare și apartenență la variate grupuri sociale); 4. nevoile psihosociale (respect de sine, prestigiu, considerație etc.); 5. nevoile cognitive; 6. nevoile estetice; 7. nevoia de autorealizare (în activitatea creativă).

Cât privește comunicarea, aceasta se fundamentează pe 7 axiome; 1. este inevitabilă (non-comunicarea este imposibilă); 2. se desfășoară la două niveluri: informațional și relațional; 3. reprezintă un proces continuu, care nu poate fi tratat în termeni de cauză și efect sau stimul și răspuns; 4. îmbracă fie o formă digitală, fie una analogică; 5. este ireversibilă; 6. presupune raporturi de forță și implică tranzacții simetrice sau complementare; 7. presupune procese de ajustare și de acomodare.

Nimeni nu s-ar putea ridica împotriva universalității mele. Săptămâna este formată din 7 zile; culorile Curcubeului sunt 7. Cine n-a auzit de Cele 7 Minuni ale Lumii: Piramidele din Egipt, Grădinile Suspendate ale Semiramidei de lângă Palatul lui Nabucodonosor

din Babilon, Statuia lui Zeus din Olimp, datorată lui Phidias, Colosul din Rodos, Templul lui Artemis («Artemision») din Efes, Mausoleul satrapului Mausol din Halicarnas, Farul din Alexandria.

Pe 7 îl întâlnim în toate mitologiile: în cea greacă, în cea islamică, în cea buddhistă, dar și în mitologiile precolumbiene, precum și în folclorul multor popoare, în beletristică, în povești și în legende.

E clar că sunt o vedetă!

Mitologiile mi-au recunoscut virtuțile, m-au considerat sacru, simbol al creației, al desăvârșirii. Ele nu au negat niciodată puterea mea magică.

Se spune că Buddha, venind pe Lume, a măsurat Universul făcând câte 7 pași în fiecare dintre cele patru direcții. Patru dintre etapele esențiale ale experienței sale eliberatoare au corespuns unui popas de 7 zile sub 7 arbori.

Allah, ca divinitate unică și universală – spune teologia Islamului –, dispune de 7 atribute fundamentale, și anume: 1. viața; 2. cunoașterea; 3. forța; 4. voința; 5. auzul; 6. văzul; 7. cuvântul. Fiecare dintre acestea reprezintă un element energetic absolut.

Potrivit Talmudului*, 7 este simbolul totalității umane; în Islam este un număr fast, legat de fecunditate; la mayași, divinitatea agrară era Zeul 7, acest arhetip al Omului Desăvârșit, care impunea familiei simbolul numeric 7. La dogonii din Africa, 7 era simbolul perfecțiunii: 4 – simbolul feminității + 3 – simbolul bărbatului. 7 este expresia Cuvântului Desăvârșit și deci al unității originare.*

7 era numărul zeilor la sumerieni, reprezentați pe frontispiciul Panteonului lor. Musulmanii sunt convinși că Paradisul este alcătuit din 7 lăcașuri: 1. Heruvimul lui Mahomed; 2. Huriile (fecioare deosebit de frumoase promise de Profet credincioșilor, în Paradis); 3. Tinerii Paradisului; 4. Cele 4 Flori; 5. Cele 4 Izvoare ale Paradisului; 6. Treptele Fericirii; 7. Sărbătorile și ospețele Paradisului. În viziunea lor, cele șapte faze ale Judecății de Apoi

sunt: 1. apariția în Cer a Coranului; 2. mărturisirea celor făptuite; 3. cântărirea faptelor bune și a celor rele; 4. puntea subțire ca firul de păr, tăioasă ca lama sabiei; 5. peretele despărțitor dintre Cer și Iad (un fel de Purgatoriu); 6. sacrificiul morților; 7. balaurul cel mare. În sfârșit, în Oceania se credea că din perechea Cer – Pământ s-au născut cei 7 zei principali: 1. Hrana; 2. Vântul; 3. Luna; 4. Soarele; 5. Fructele și Rădăcinile; 6. Marea și Peștii; 7. Războiul și Creația Omului.

Numărul 7 este frecvent folosit în Biblie*. Se vorbește aici despre cele 7 Duhuri care sălășluiesc peste obârșia lui Iesel, despre cele 7 Ceruri, unde se află lăcașul cetelor de îngeri. Se spune că Solomon a zidit Templul din Ierusalim în 7 ani. Iar la asediul Ierihonului, 7 preoți, cu 7 trâmbițe, au ocolit în a 7-a zi de 7 ori cetatea, zidurile acesteia dărâmându-se la glasul trâmbițelor. În Vechiul Testament citim că, la Potop, au fost salvate câte 7 animale curate din fiecare specie. Tot aici aflăm cum a tălmăcit Iosif visul despre cele 7 vaci grase și cele 7 vaci slabe.*

Este semnificativ, nu-i așa, că Vechiul Testament *folosește de 77 de ori numărul 7! În* Apocalipsă*, numărul 7 figurează de 40 de ori. Aici se pomenește despre cele 7 Duhuri care stau înaintea Scaunului «Celui ce este și Celui ce era, Celui ce vine», despre cei 7 îngeri cu cele 7 cupe ale mâniei, cele 7 epistole trimise celor 7 Biserici care sunt în Asia, despre cele 7 trâmbițe, cele 7 peceți etc.*

E mai mult decât evidentă aprecierea de care mă bucur! Sfântul Augustin a admis că 7 măsoară timpul în istorie, timp al peregrinării omului pe Pământ.

Să remarcăm că pe 7 îl găsim frecvent în folclorul românesc. De pildă, în Gruia în Țarigrad*, întâlnim versuri precum: «*Șapte ani s-au împlinit; Șapte ani au și trecut*». El figurează în multe basme, începând cu* Albă ca Zăpada și Cei 7 Pitici, Cei 7 Corbi, Croitorașul cel Viteaz*, care omoară 7 dintr-o lovitură etc.*

Numărul 7 s-a remarcat și în literatură. Cine n-a auzit de cele 7 Pleiade, de cele 7 fiice ale zeului Apollo sau ale Titanului Atlas și

ale Nimfei Pleione urmărite de îndrăgostitul Orion, pe care Zeus le-a strămutat în Cer împreună cu urmăritorul lor și cu câinii lui și i-a prefăcut în trei constelații: Pleiadele, Orion și Câinii. Poezia a dat numele de Pleiadă celor 7 poeți care au trăit sub Ptolemeu al II-lea Filadelful (309-246 î.e.n), rege al Egiptului, care și-a legat numele de construirea Farului din Alexandria. Venind mai încoace, să-l evocăm pe Dante Alighieri (1265-1321). Creatorul Divinei Comedii *pomenește despre cele 7 sfere planetare, cărora le corespund cele 7 arte liberale.* Cele 7 prințese *ale poetului persan Nizami (c.1140-c.1202) împletesc simbolismul culorilor cu astrologia. În Jurnalul său, Liviu Rebreanu mărturisește că în romanul* Adam și Eva *a recurs la teoria reîncarnării eroilor săi pornind de la mitul platonician al împărțirii androginului în două jumătăți (bărbat și femeie), care se caută într-un ciclu de 7 vieți terestre.*

Numărul 7 i-a inspirat mereu și pe muzicieni. Sunt sigur că susținătorii mei au audiat oratoriul Cele 7 Porți ale Ierusalimului*, de compozitorul polonez Krzysztof Penderecki (n. 1933).*

Numărul 7 este asociat, de asemenea, cu lampa roșie a societăților secrete chineze, care are 7 brațe, și cu candelabrul cu 7 brațe al evreilor (menora).

La încheierea celor schițate până aici, o să scot asul din mânecă: voi enumera cele 7 minuni ale lumii afacerilor: 1. cumpărarea de către S.U.A., în 1867, a peninsulei Alaska de la ruși; 2. fondarea Intel (Integrated Electronics), în 1963, best-buy-ul secolului al XX-lea; 3. Coca-Cola, născută acum mai bine de un secol, în 1896; 4. cumpărarea de către Microsoft a tehnologiei antivirus GECAD de la România; 5. industria pantofilor-sport Nike, apărută în 1972; 6. inventarea PET, adică a banalei sticle de plastic; 7. impactul Internetului asupra lumii afacerilor.

Așadar, voi câștiga! Voi fi președinte!".

Φ – misteriosul Număr de Aur

Arina și Gabriela, oaspeții lui Cătălin, sunt vizibil conectați la tensiunea alegerilor prezidențiale. Discuția celor trei demarează pe această temă:

Arina: Sunt propuși și candidați independenți la președinție? Are șanse vreunul să-l învingă pe 3 sau pe 7?

Cătălin: Da, *Numărul de Aur* sau, dacă vreți, misteriosul și arogantul Φ . După cum știți, acest număr face parte din clasa infinită a numerelor iraționale, mai rafinată decât clasa numerelor naturale, căreia îi aparțin 3 și 7. Dar chiar și în cadrul clasei numerelor iraționale, Numărul de Aur e mai cu moț printre confrații lui.

Abia a început discuția, că celor trei li se alătură Andrei, un coleg al lui Cătălin. După prezentările de rigoare, Cătălin îi explică lui Andrei interesul oaspeților lui pentru Numărul de Aur. Andrei intervine cu propriile lămuriri:

Andrei: Printre numerele iraționale, Numărul de Aur ocupă, într-adevăr, un loc privilegiat; e prezent constant în geometria decagonului și a pentagonului.

Arina: Mai întâi, spuneți-mi ce este Numărul de Aur?

Cătălin: În termeni matematici, este acel număr mai mic decât pătratul său cu exact o unitate. Cu alte cuvinte, este soluția ecuației $x^2 - x - 1 = 0$.

Arina: Și care-i originea lui?

Cătălin: Originea Numărului de Aur trimite la mecanismele corpurilor platonice.

Gabriela: Au fost denumite și numere pitagorice sau cosmice. Sunt cunoscute înaintea lui Platon (428-348/347 î.e.n.) de către pitagoreici.

Andrei: Mai precis, este vorba despre cele cinci poliedre regulate:

tetraedrul, cubul, octoedrul, dodecaedrul și izocaedrul.

Arina: Dacă-i așa, atunci ceea ce numim mistica Numărului de Aur se află în strânsă corelație cu mistica numerelor 5 și 10.

Gabriela: Lucrurile se leagă. Nu întâmplător, cei vechi puneau mare preț pe aceste numere. Relația dintre 10 și primele 4 numere din șirul numerelor naturale: 10 = 1 + 2 + 3 + 4 o numeau *tetradis*. Termenul *tetradis* apare explicit în jurământul sacru al pitagoreicilor.

Cătălin: La greci, 10 – *decada* – desemna Universul!

Andrei: Există o strânsă legătură între Numărul de Aur și modul în care se taie diagonalele poligoanelor cu 5 și cu 10 laturi, adică pentagonul și decagonul, precum și între diagonala pentagonului și latura lui.

Cătălin: De fapt, Numărul de Aur este însăși cheia construcției pentagonului!

Arina: Cine l-a descoperit?

Gabriela: A fost cunoscut cu mult înaintea grecilor. Egiptenii l-au folosit la construcția piramidelor.

Arina: Ei l-au botezat așa de pompos?

Cătălin: Nu. O să vezi puțin mai încolo. Nici chiar discipolii lui Pitagora (570-480 î.e.n.), care l-au folosit, nu i-au pus un nume!

Arina: Și pe urmă?

Andrei: Numărul de Aur a avut un impact deosebit în timpul Renașterii. Astronomul german Johannes Kepler (1571-1630) spunea despre acest număr că este „o bijuterie“. Leonardo da Vinci (1452-1519) a descoperit Numărul de Aur atunci când a studiat proporțiile dintre diferitele părți ale corpului omenesc. El l-a îndemnat pe matematicianul italian Luca Pacioli (1445-1510) să scrie o carte despre acest

număr. Pacioli a publicat, la Veneția, în 1509, *Divina proportione*, bogat ilustrată de Leonardo da Vinci. Este cea dintâi expunere a proprietăților matematice ale Numărului de Aur.

Luca Pacioli

Gabriela Am citit undeva că pictorul și gravorul german Albrecht Dürer (1471-1528) a venit la Bologna să se inițieze în arta perspectivei de la Pacioli.

Arina: De fapt, ce a descoperit Pacioli?

Cătălin: Luca Pacioli a fost convins că a dezvăluit o știință secretă. El considera că Numărul de Aur este asemenea Sfintei Treimi, fiindcă reprezintă o relație între trei numere, dintre care cel mai mare este suma celorlalte două, astfel încât raportul celui mai mare față de cel mediu este egal cu raportul celui mediu față de cel mic.

Arina: Am impresia că ne învârtim în jurul cozii. Eu vreau să știu concret ce este și ce valoare are acest număr, pe care nu faceți altceva decât să-l ridicați în slăvi.

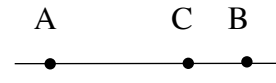
Cătălin: Valoarea lui este 1,618033… Iar expresia lui geometrică este legată de problema împărțirii unui segment printr-un punct, respectând o anumită condiție, care asigură armonia.

Arina: Nu înțeleg nimic!

Cătălin: Hai să procedăm altfel. Să luăm un segment AB și să fixăm pe el un punct C, care să îndeplinească următoarea condiție: să fie astfel poziționat încât segmentul mai mare AC să fie media proporțională între întregul

segment AB și partea rămasă CB. Uite aici, pe hârtie; trebuie să avem proporția:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$



Am spune, în limbaj modern, că punctul C operează *o secțiune de aur*, iar raportul $\frac{AC}{CB}$ se numește *Numărul de Aur*.

Arina se agită.

Cătălin: Te rog, Arina, lasă-mă să continui. Observi în această figură că AB = AC + CB. Introduc această sumă în proporția de mai sus și obțin:

$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

expresie pe care o pot scrie:

$$\frac{AC}{AC} + \frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$ și, în continuare,

$$1 + \frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Gabriela: Ei și?

Cătălin: Stai puțin, Gabi! Am spus, ceva mai înainte, că raportul $\frac{AC}{CB}$ reprezintă Numărul de Aur. Pentru virtuțile lui incontestabile, a fost botezat cu inițiala numelui celebrului sculptor grec Fidias (Phidias) – Φ.

În formula mea de mai sus, avem, așadar: $\frac{AC}{CB} = \Phi$ și $\frac{CB}{AC}$, adică inversul lui, este $\frac{1}{\Phi}$.

Formula devine 1 + $\frac{1}{\quad}$ = .

Arina: Deci o ecuație pe care o pot scrie $\frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} = \frac{\quad^2}{\quad}$ sau $^2 - \quad - 1 = 0$.

Cătălin: Exact. Iar această ecuație o rezolvăm ușor. Ia și tu pixul și socotește.

Arina (face calculele): Rădăcinile ecuației $^2 - \quad - 1 = 0$ se obțin prin metoda de rezolvare a ecuațiilor de gradul doi: $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; în cazul nostru a = 1, b = – 1, c = – 1. Obținem că are valoarea 1,618033988…

Da. Dar nu văd încă aura de misticism care-l înconjoară pe Φ.

Cătălin: Numărul de Aur asigură armonia.

Andrei: Mai este și un alt motiv care a contribuit la sacralizarea Numărului de Aur.

Cătălin: Simplu, e raportul dintre două numere consecutive din șirul lui Fibonacci.

Arina: Cine mai e și acest Fibonacci?

Andrei: Nimeni altul decât matematicianul Leonardo din Pisa (1180-1230). Era poreclit Fibonacci, adică

feciorul lui Bonacci. El a transpus, printr-un șir de numere, o lege importantă referitoare la creșterea organică. Pornind de la problema: câte perechi de iepuri de casă se nasc într-un an dintr-o singură pereche de iepuri, Fibonacci a stabilit șirul următor, care-i poartă numele: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ……. Acest șir se bucură de următoarea proprietate: fiecare termen al lui, începând cu cel de-al treilea, este egal cu suma celor doi termeni precedenți (3 = 2 + 1; 5 = 3 + 2; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8). Or, raporturile a doi termeni consecutivi din această serie tind spre Φ.

– = 1,6; — = 1,625; — = 1,61…; $\frac{34}{21}$ = 1,619

Andrei: De-a lungul veacurilor, oamenii l-au venerat pe Fibonacci pentru această descoperire. În prezent, Asociația Fibonacci, creată în 1963, publică o revistă consacrată acestui matematician italian, intitulată „Fibonacci Quarterly“. E ușor de urmărit pe Internet, la adresa: *www.MSCS.dat.ca.Fibonacci.*

Leonardo din Pisa (Fibonacci)

Cătălin: Șirul 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... tinde rapid spre o progresie geometrică ce are ca rație Numărul de Aur, dar Fibonacci nu știa acest lucru. Luna trecută, am avut norocul să foiletez traducerea în limba engleză a volumului *Liber Abaci – Cartea socotitului* (1202), datorată lui Laurence Siegler. Face parte din pregătirea specială pentru concurs. Practic, avem de-a

face cu un manual de aritmetică, în care întâlnim aspecte dintre cele mai diverse. El oferă criterii de divizibilitate, ușurează adunarea fracțiilor cu ajutorul celui mai mic multiplu comun, introduce șirul numeric care poartă numele autorului. Și tot această carte pune bazele calculului comercial. Aș observa însă că, din cele 600 de pagini ale cărții lui Fibonacci, doar o *jumătate de pagină* tratează problema iepurilor! Și tot făcând „săpături", am aflat că problema nu era originală! O fi știut, oare, Fibonacci că un călugăr enciclopedist englez – Beda Venerabilul (c. 672/673-735) –, cunoscut pentru faimoasa lui metodă de calcul cu degetele, a inclus, în aritmetica sa, problema iepurilor cu aproximativ 500 de ani înaintea lui?

Gabriela: Păi, caracteristicile acestea ne garantează puterea nemăsurată pe care o pretinde Numărul de Aur?

Cătălin: Numărul de Aur susține că are toate atuurile să devină președinte – ca independent – fiindcă, în fond, asigură armonia atât în natură, cât și în artă. Pretutindeni și întotdeauna se apelează la virtuțile lui pentru a se veni cu explicații satisfăcătoare.

Arina: Vreau exemple.

Cătălin: De pildă, pe baza viziunii sale, au fost stabilite dimensiunile camerei regale din Marea Piramidă a lui Keops. Ombilicul împarte corpul omenesc conform Numărului de Aur, asigurându-i armonia. Numărul de Aur reprezintă canonul după care pot fi stabilite proporțiile diferitelor părți ale unei clădiri. Arhitecții au construit catedralele gotice folosind „tăietura de aur". Mulți artiști și esteticieni văd în caracteristicile matematice ale Numărului de Aur fundamentul virtuților estetice. Ei sunt de părere că

acesta simbolizează perfecțiunea, oferind, în același timp, o explicație universală a simțului estetic. Folosind aceste argumente, Numărul de Aur ajunge la concluzia că el reprezintă, de fapt, explicația unică și ultimă a Frumosului, că este Divin!

Gabriela: La noi se știa ceva despre toate acestea?

Cătălin: Am să-ți spun un lucru care o să-ți placă: Numărul de Aur este profund îndatorat unui compatriot al nostru, Matila Ghyka (1881-1965), ale cărui cercetări de pionierat ilustrează legătura intimă dintre matematică și artă. Opera lui Matila Ghyka, creată în deceniile II-III ale veacului trecut, este, după cum bine spune acad. Solomon Marcus, *„prin excelență o operă deschisă care ne invită mereu la o nouă lectură, în funcție nu numai de achizițiile noi ale științei, ci de propria noastră sensibilitate“* (Solomon Marcus, *Arta și știința*, București, Editura Eminescu, 1986).

Andrei: Am preamărit virtuțile Numărului de Aur în artă, dar despre impactul lui în natură n-am pomenit mai nimic. Frecvența cu care întâlnim Numărul de Aur în natură este impresionantă. Plantele, animalele și omul se caracterizează prin raporturi care se apropie de acest număr. Știați că lista descendenților unei albine-mascul este reprezentată prin șirul lui Fibonacci? La plante, amplasarea frunzelor în jurul tulpinii respectă Numărul de Aur, care le asigură maximum de lumină. Spiralele semințelor de floarea-soarelui sunt dispuse în receptacul pe baza Numărului de Aur. Măsurați-vă din creștet până în tălpi, apoi de la ombilic până la tălpi și veți găsi Numărul de Aur prin împărțirea celor două distanțe. Măsurați lungimea brațului de la umăr la vârful

degetelor și împărțiți-o la distanța dintre cot și vârful degetelor și veți găsi Numărul de Aur!

Cătălin: Eu am un tricou, la care țin mult, pentru că reprezintă un foarte cunoscut desen al lui Leonardo da Vinci, botezat *Omul Vitruvian*, după numele celebrului inginer și arhitect roman Marcus Pollio Vitruvius (secolul I î.e.n). Desenul este inclus în volumul acestuia *De architectura;* o să vi-l arăt, fiindcă reprezintă ilustrarea optimă a Numărului de Aur la om. *Omul Vitruvian* figurează și pe moneda de 1 euro.

Andrei: Eu sunt, pur și simplu, uluit de posibilitatea acestui număr de a fi reprezentat printr-o fracție continuă infinită, adică:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

Cătălin: Or, fracțiile continue aproximează cel mai bine un număr irațional.

Arina: Pe mine mă impresionează perenitatea Numărului de Aur. O ilustrează absolut magnific arhitectul și pictorul francez Charles Le Corbusier (1887-1965). El a creat un nou sistem al proporțiilor arhitecturale, brevetat în 1945, care se bazează pe Numărul de Aur. Iar Dan Brown l-a evocat în romanul său *Codul lui da Vinci*.

Andrei: Ar mai fi de spus că, în locul „tăieturii de aur“, Le Corbusier a ales o scară de proporție care să corespundă cerințelor arhitecturii din timpul său. Acest etalon modern l-a denumit *modular,* având înțelesul din Antichitate și Renaștere pentru „tăietura de aur“.

Buclucuri matematice

Arina visează că se află în parcul din Țara Numerelor și citește cartea despre numere scrisă de Florica T. Câmpan, apărută în 1965. La un moment dat, se așază lângă ea un domn mai în vârstă, cu o înfățișare sobră. Se simte de departe că e un cărturar, un profesor. Curios din fire, trage cu ochiul la cartea Arinei.

Profesorul: Vă interesează numerele, domnișoară?

Arina: Foarte mult, domnule. Numerele pun ordine în viața omului.

Profesorul: Dar pot provoca și buclucuri.

Arina: De ce?

Profesorul: Să vă explic. Știți că vin alegerile. Se spune că nu poate exista scrutin perfect. Și fiindcă nu-mi place să fiu manipulat, m-am gândit să mă documentez la o sursă sigură: *matematica electorală*.

Arina: Există așa ceva?.

Profesorul: Firește. Părintele matematicii electorale este cunoscutul marchiz de Condorcet (1743-1794), matematician, filosof, economist, dar și om politic francez.

Arina: După alegeri, urmează ceva foarte dificil: repartizarea corectă a locurilor în parlament.

Profesorul: Da, și asta a produs dintotdeauna dureri de cap. Criteriul cel mai frecvent adoptat a fost acela al proporționalității. Chiar aplicat cu acuratețe, acest criteriu duce la încurcături, dacă nu la situații de-a dreptul ridicole. Folosindu-l, se poate ajunge la o repartiție a locurilor de genul: 30,005; 84,9317; 24,598 etc., etc. Evident, numerele acestea le-am ales întâmplător, pentru a ilustra fenomenul. Deci legiuitorii sunt obligați, pe de o parte, să rotunjească totalurile obținute, iar pe de alta să nu comită ilegalități.

Or, chiar și în matematica pură problema rotunjirilor devine una cumplită. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – considerat de către unii cel mai mare matematician al tuturor timpurilor – spunea cu umor că unica soluție pentru rotunjire este… tragerea la sorți!

Arina: Democrațiile occidentale nu i-au dat de capăt?

Profesorul: În S.U.A., mari personalități ale științei au încercat să rezolve această problemă, dar n-au ajuns la soluții satisfăcătoare. Am aici numeroase exemple pe care le-am cules din literatura de specialitate. O să-ți arăt două. În primul caz, e vorba de cinci state federale, notate cu A, B, C, D, E, cărora trebuia să le fie repartizate 26 de locuri. După metoda lui Alexander Hamilton (1757-1804), om de stat american, colaborator a lui George Washington și fondator al partidului federalist, repartiția urma să fie făcută ca în tabelul pe care ți-l arăt acum:

Statul	**Populația (sute de mii)**	**Numărul real al reprezentanților**	**Prima rundă de distribuire**	**A doua rundă de distribuire**
A	9.061	9,061	9	9
B	7.179	7,179	7	7
C	5.259	5,259	5	5
D	3.319	3,319	3	4
E	1.182	1,182	1	1
Total	**26.000**	**26**	**25**	**26**

După cum se vede, domnișoară, în prima rundă Hamilton a renunțat la partea zecimală și a ajuns la 25 de reprezentanți. În cea de-a doua rundă, a repartizat statului D un loc în plus, deoarece partea zecimală

a lui D este cea mai mare. Hamilton a încercat încă o îmbunătățire: a mărit numărul locurilor la 27 și a propus următoarea nouă repartiție: A = 9 locuri; B = 8 ; C = 6; D = 3 și E = 1. În acest caz, câștigă statele B și C, dar pierde statul D. Această manevră subtilă este cunoscută sub numele de *Paradoxul Alabama*.

Arina: Așa se ajunge la înfundătură. Nu există o altă cale?

Profesorul: Ba da, există o metodă celebră de repartiție, propusă de Thomas Jefferson (1743-1826), președinte al S.U.A. între 1801 și 1809, adoptată de George Washington (1732-1799). Este cunoscută sub numele de *metoda celor mai mari divizori*. Pe când Hamilton a folosit ca divizor numărul 1 000, Jefferson a recurs la numărul 906,1. Alegerea lui 906,1 ca divizor îi dă lui Jefferson 10 locuri pentru statul A, 7 locuri pentru statul B, 5 locuri pentru statul C, 3 locuri pentru statul D și 1 loc pentru statul E, deci un total de 26 de locuri. Cu metoda acestuia din urmă, statul cel mai populat a mai câștigat un reprezentant. Mult mai rar, e drept, se adoptă sisteme de reprezentare preferențială, în care caz buclucul e și mai evident.

Arina: După câte constat, socotelile pot duce, oriunde în lume, la paradox.

Profesorul: Nu la un paradox, ci la un număr mare de paradoxuri, ale căror mecanisme sunt detectate și analizate de specialiști cu ajutorul unor tehnici mai vechi sau chiar foarte noi ale matematicii, mai mult sau mai puțin sofisticate.

Arina: Care ar fi cele mai „fioroase“ dintre aceste paradoxuri?

Profesorul: Bunăoară, *Paradoxul lui Condorcet*, potrivit căruia preferințele indivizilor exprimate prin vot sunt

„intranzitive“, ceea ce înseamnă că de multe ori opțiuni pertinente ale cetățenilor sunt respinse de mari grupări sociale ca fiind „irațională“. Dintre paradoxurile matematicii politice, celebru este cel al cunoscutului economist american Kenneth J. Arrow (n. 1921), care a admis că din punct de vedere matematic idealul democrației perfecte este imposibil. Afirmația aceasta i-a năucit și pe matematicieni, și pe economiști, dar i-a asigurat autorului Premiul Nobel, în 1972!

Arina: Dacă nu îndrăznesc prea mult, aș dori să-mi mai vorbiți despre paradoxuri.

Kenneth J. Arrow

Profesorul: Atunci să mai abordăm un aspect: se știe că, în general, sistemul preferențial conduce, prin transfer, la multe paradoxuri. Acest sistem face ca acela care, de fapt, are dreptul să învingă, până la urmă să fie învins. Un paradox important este cel al *amendamentului*, care se pretează la viclenii. Iată, să presupunem că în Camera Reprezentanților se propune un amendament la o lege. Dacă acesta este acceptat, la al doilea scrutin se cere să se aleagă între legea amendată și respingerea legii. În acest fel, de multe ori legi bune cad la al doilea scrutin, din pricina unor amendamente propuse în mod viclean.

SECVENȚE DE ISTORIE

Ionuț află despre apariția numerelor

Arina: De ce ești îmbufnat, Ionuțe?

Ionuț: Cum să nu fiu! Tu te distrezi și citești tot felul de povești despre numere, o să participi la concurs, poate o să pleci în Marea Britanie, iar eu învăț, fac și desfac probleme. Am numai 10 la matematică, dar n-am voie să particip…, cică sunt prea mic. Adevărul e că nu-s tare la istoria numerelor, n-am idee cum au apărut ele.

Arina: Câte ceva pot să-ți spun eu.

Ionuț: De exemplu, cum au început să numere strămoșii noștri?

Arina: Ionuțe, totul a plecat de la natură. Ca să măsoare cantități (cereale, piei de animale etc.), strămoșul nostru se folosea fie de pietricele sau de scoici, fie de boabe de cereale sau de bețișoare, care țineau loc de număr. Lua, de pildă, un bețișor și o piele de animal, pe care le punea, să zicem, în stânga pielea și în dreapta bețișorul; lua, în continuare, alt bețișor și cea de a doua piele; proceda la fel pentru a treia, a patra ș.a.m.d.

Ionuț: Au existat și alte modalități pentru a avea o evidență a bunurilor?

Arina: La babilonieni, stăpânul proceda într-un mod asemănător atunci când încredința păstorului turma sa. Pentru fiecare oaie predată acestuia punea într-un bol de lut proaspăt frământat câte o pietricică. Atunci

când încheia predarea oilor, astupa bolul, care se solidifica. La revenirea turmei, se spărgea bolul și se proceda invers decât la predare. Pentru fiecare oaie recepționată se extrăgea din bol câte o pietricică. Dacă rămâneau pietricele în bol, ciobanul era obligat să dea explicații stăpânului. Dacă, dimpotrivă, nu ajungeau pietricelele, însemna că între timp oile s-au înmulțit.

Ionuț: Dar la noi?

Arina: La noi gospodarul și păstorul au folosit în același scop *răbojul*, iar plutașii *încrustările pe cherestea*.

Ionuț: Ce este răbojul?

Arina: Pretențios spus, este un instrument de evidență și de control în tranzacții comerciale, înregistrări fiscale ș.a. Practic, este o bucată de lemn, un bețișor pe care se marchează linear, prin crestături, diverse cantități (mărfuri, sume de bani, număr de animale etc.). Apoi acest suport de lemn se despică în două, fiecare parte rămânând în posesia unei jumătăți de bețișor. Acest obicei a fost păstrat mai ales printre ciobani. Să mai reții, Ionuțe, că, în vremuri de demult, oamenii își foloseau mâinile pentru a număra.

Ionuț: În clasa I socoteam pe degete!

Arina: Cu ajutorul mâinilor străbunii numărau până la 10, iar pentru numere mai mari se serveau și de degetele de la picioare. Oricum, Ionuțe, te felicit că vrei să știi cât mai multe despre numere. Nu trebuie să fii trist că nu participi la concurs. Peste câțiva ani o vei face cu brio.

Ionuț: O să câștig, ai să vezi! Știi că mă pasionează și numerele figurative.

Arina: Precis că ai pornit de la metoda grecilor, care

reprezentau numerele naturale prin construirea de figuri geometrice cu ajutorul pietricelelor.

Ionuț: Cum ai ghicit? Tocmai mă gândeam la numerele triunghiulare, formate din mai multe pietricele așezate în formă de triunghiuri echilaterale, apoi la numerele pătratice, pentagonale, poligonale.

Arina: Desenează-mi câteva.

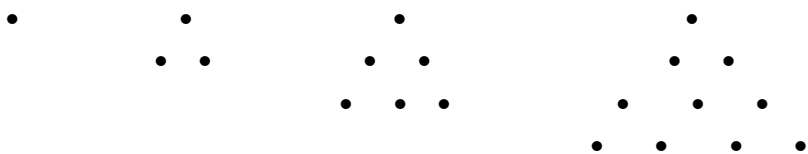
Ionuț desenează:

3 4 5 6

Ionuț: Poftim. E simplu, numerele triunghiulare se obțin unul din altul, adaugându-se la baza triunghiului precedent un nou rând de pietricele având o unitate în plus (adică o pietricică în plus). Ele se obțin adăugând întregii consecutivi: 1; 1 + 2; 1 + 2 + 3; 1 + 2 + 3 + 4 ș.a.m.d.

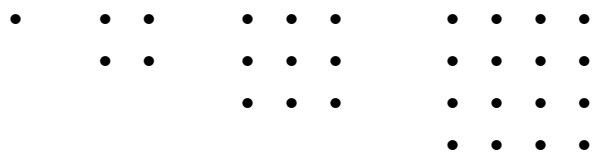
Arina: Știu că șiruri de numere de genul acestora i-au preocupat nu numai pe greci, ci și pe egipteni, pe babilonieni, pe hinduși și pe chinezi.

Ionuț: Pe greci i-au delectat! Pe mine, la fel. Uite, aș nota pe 1, 3, 6 și 10 așa:



1 3 6 10

Ionuț: Aș folosi pentru asta rubine. Pun întâi 1 rubin, apoi adaug 2 rubine și îl obțin pe 3, după care pun încă 3 rubine și îl obțin pe 6. Nu e frumos? Numerele pătratice le-aș face din safire. Așa ar arăta 1, 4, 9, 16:

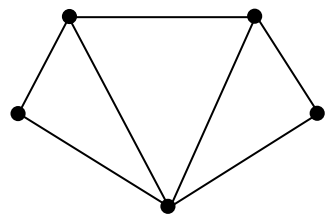


1 4 9 16

Ionuț: Numerele pătratice se obțin prin adăugarea numerelor impare consecutive.

Arina: Numerele pătratice se pot obține și prin alăturarea a câte două numere triunghiulare,

Ionuț: Grecii deduceau numerele poligonale din numere triunghiulare, încă de acum 2300 de ani. Îți fac eu un desen pentru numere pentagonale. Iată-l:



Arina Ionuțe, ești o contradicție! La capitolul numere figurative devii sau ai și devenit as.

Ionuț: Mie îmi plac mult numerele figurative! Poveștile cu aceste numere le găsesc *cool*! Pe tema asta o să fac o expoziție color la școală.

Omul a numărat înainte de a vorbi

E mult de când a plecat Ionuț. Cufundată în fotoliu, Arina se gândește la miracolul apariției numerelor. Se știe – își spune ea – că omul a inventat mai întâi numerele și mai apoi literele. Dar ce știm despre capacitatea omului de a recunoaște și de a mânui numerele? Cu jumătate de secol în urmă, lingvistul american Noam Chomsky (n. 1928) a afirmat că orice ființă umană se naște cu capacitatea vorbirii naturale. În prezent, specialiștii în științele neurologice susțin că există competențe nonverbale care permit evaluarea cantităților chiar înainte de stăpânirea limbajului. Mecanisme preexistente au fost detectate la nou-născuți, care-i ajută la evaluarea, compararea și chiar operarea cu cantități extrem de reduse. Începând de la șase luni, sugarul deosebește cantitățile foarte mici, pe care le poate aduna sau scădea prin mijloace nonverbale. Ulterior, pe la doi sau trei ani, copilul își folosește degetele în același scop. Mai târziu, el se va servi de un sistem bazat pe limbajul articulat, care-i va permite să efectueze calculele în mod precis.

Am citit că imagineria cerebrală a permis descoperirea unei largi rețele de circuite neuronale în creier care asigură calculul mental. Ele implică multiple regiuni situate pe loburile frontal și parietal și variază parțial potrivit tipului de operație efectuată: comparație, adunare, scădere sau înmulțire. Se vehiculează ipoteza că în calculul mental sunt implicate două sisteme cerebrale: unul nonverbal, bazat pe sensul numerelor și pe manipularea cantităților; celălalt verbal, bazat pe memorizarea calculelor (adunări simple și înmulțiri). Sistemul nonverbal stă la baza capacității aritmetice a copilului și este legat de circumvoluțiunea intraparietală. Trebuie să mă mai gândesc... S-a făcut miezul nopții.

PRIN CLUBURI

Asociația Iubitorilor Numărului

Un grup de colegi de clasă ai Arinei discută aprins, pe când ceilalți dansează și scandează un soi de descântec:

Sandra: Pieriți pentagoane, hexagoane
Și alte goane,
Cum pier negurile,
Cum se sting vânturile.

Valentin: Pieriți ecuații plicticoase,
Pieriți matrici ticăloase,
Cum se risipește roua la Soare,
Cum dispare spuma de mare.

Margareta: Fugiți gânduri blestemate
De ipoteze alambicate,
Concluzii întortocheate
Și demonstrații îmbârligate.

În replică, Arina le propune colegilor să se organizeze într-o Asociație a Iubitorilor Numărului. Propunerea este primită cu aplauze. Arina este aleasă președinta Asociației. Pentru început, ea va trebui să creeze o bază de date necesară pregătirii candidaților pentru concurs.

Președinta își ia imediat rolul în primire și distribuie sarcini fiecărui membru al Asociației: Sandra va studia matematica la egipteni; Valentin se va edifica asupra sistemului de numărare al

aztecilor și mayașilor; Margareta va culege materiale despre matematica la sumerieni și la babilonieni; Toma va aduce informații despre matematica la greci; Stela despre matematica la romani; Mihai, împreună cu Nic, va căuta informații despre sistemele alfabetice de numărare; Cristi și Rodica vor culege informații despre matematica la chinezi; iar Bogdan și Ionuț, despre matematica la indieni. Și, bineînțeles, fiecare va vizita clubul profilat.

La Clubul Primelor Zece Numere

Nopțile Arinei sunt populate de vise, cel mai adesea în legătură cu numerele. Iată unul dintre ele: se făcea că este invitată la Clubul Primelor Zece Numere. Un portar stilat, semănând mai degrabă cu un lord din veacuri trecute, o poftește înăuntru. O întâmpină *Numărul 1*, care-i adresează „Bun venit!“. Arina mulțumește și încearcă să-și exprime dorința de a afla cât mai multe despre el și despre confrații lui.

Arina: Domnule Unu, vă mărturisesc că sunt o admiratoare a Domniei Voastre și știu multe despre prezența *Numărului 1* în lume.

Numărul 1: Sunt încântat să aflu asta!

Arina: Știu că *Numărul 1* a fost reprezentat printr-o linie verticală de către sumerieni, babilonieni, egipteni, hinduși, romani, arabi, chinezi (uneori), cu o linie orizontală de către japonezi și chinezi, iar cu un punct de către mayași. Evreii, fenicienii, arabii, grecii îl notau cu prima literă a alfabetului lor…

În acel moment, intră în sală trei tineri. Numărul 1 face prezentările: Cristina și Cabiria, studente la Psihologie, respectiv la Teologie, și Sorin, doctorand în Filosofie.

Arina: Discutam despre *Numărul 1*.

Sorin: De aceea am și venit aici. Admirația mea pentru Domnia Sa e imensă. *unu* reprezintă locul-simbol al ființei, centrul cosmic și ontologic. Impactul lui este covârșitor. După filosoful grec Xenofan (Xenophanes) (570-480 î.e.n.), *unu* semnifică pe Zeul Unic sau pe Zeul Cel Mare; este numărul numerelor, simbolizând unitatea, absolutul. Să ne reamintim monada matematicianului și filosofului german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): *unu* este cuvântul-cheie care stă la baza religiilor monoteiste. În povestirile legendare, cât și în motivele folclorice, Dumnezeu Cel Unic este foarte frecvent simbolizat prin 1.

Cristina: Iar după psihiatrul elvețian Carl Gustav Jung (1875-1961), *unu* este simbol unificator.

Numărul 1: Constat, cu respect, că se știu multe despre mine și sunt încântat să vă prezint colegilor mei. Aș începe cu cel mai apropiat: *Numărul 2*. Obârșia lui este legată de noțiunea de pereche. La început, a fost reprezentat prin repetarea lui 1, ulterior a devenit independent.

Arina: Mi-aș permite, Domnule 2, să afirm că impactul Domniei Voastre este, într-adevăr, remarcabil. Sunteți cel dintâi număr par și cel dintâi număr prim din șirul numerelor naturale. Numele Domniei Voastre este pomenit în toate limbile. Oamenii se împart în bărbați și femei, iar la baza moralei se află conceptul dual *bine – rău*.

Numărul 2: Mă flatați, domnișoară.

Cristina: După filosofia zoroastrică, lumea a luat naștere din dedublarea timpului primordial, timpul infinit, care produce din sine însuși dualitatea bine – rău.

Cabiria: Două sunt principiile cosmogonice ale mitologiei chineze, văzute ca primii zei născuți din haosul

oceanului primordial: *yin* = principiul feminin; *yang* = principiul masculin.

Arina: Să revenim la discuția noastră și să constatăm că viața de zi cu zi se exprimă prin elemente binare. Ne referim continuu la *zi* și *noapte*, la *individ* și *societate*, la *Cer* și *Pământ*, la *viață* și *moarte*. Suntem permanent preocupați de *sănătate* și *boală*, de *sărăcie* și *bogăție*, de *fericire* și *nenorocire.*

Sorin: În metafizica grecilor, regăsim frecvent ceea ce ei numeau *Diada.* Aristotel a întemeiat teoria categoriilor pornind de la ideea cuplurilor contrare.

Cabiria: Mă gândesc la rolul antinomiei *par–impar* în filosofia pitagoreicilor.

Cristina: Gândirea noastră se bazează pe folosirea dihotomiilor de tipul: *întreg–parte, finit–infinit*, *cantitativ–calitativ*, *ordine–haos*, *simetrie–asimetrie*, *local–global*, *transformare–invariant*.

Sorin: Aș spune că matematicienii sunt obsedați de ideea dualității. Nu vă mirați. E o formulă capabilă de două înțelesuri, ambele adevărate, unul obținut din celălalt prin simpla permutare reciprocă. Dar aria de operare a dualității depășește matematica, incluzând logica și programarea la calculator.

Cristina: În chimie, avem numeroase substanțe formate din două elemente, în gramatică lucrăm cu singular și plural, există electricitate pozitivă și electricitate negativă etc.

Sorin: Numai două cuvinte, dacă tot a venit vorba despre *doi:* toată lumea asociază informaticii termenul *binar*. Numerele cu care lucrează calculatorul aparțin sistemului cu baza 2, adică 0 și 1. Algebra pe care o folosește calculatorul lucrează cu două variabile, care pot lua valoare de *adevăr* sau de *fals* și care sunt

reprezentate în sistem binar prin 0 și 1. Perechea 1–0 traduce circuitul electric deschis sau închis.

Cristina: Până la urmă, binaritatea nu este, totuși, o cunoscută de dată modernă. Au descoperit-o căutătorii de aur din Africa. Baulii din Côte d'Ivoire l-au adoptat pe 2 ca bază pentru sistemul lor de greutăți.

Sorin: Aș vrea să adaug că, în subconștientul individual, coexistența a două componente de „gen", sub forma elementelor arhetipale *animus* și *anima*, constituie una dintre descoperirile datorate lui Jung.

Cabiria: Să nu uităm nici de lirică; metrica schemelor ritmice ale versului se bazează pe un sistem binar.

Arina: Ai dreptate, Cabiria, limbile clasice au „operat" cu silabe lungi și scurte, iar cele moderne cu silabe accentuate și neaccentuate.

Cristina: După Gioachimo da Fiore, călugăr benedictin calabrez (1135-1202), Istoria Sfântă și Scriptura sunt dominate de numerele 2 și 3. *Cele 2 seminții* alese de Dumnezeu sunt evreii și neamurile, iar cele *3 etape ale istoriei* sunt: 1. Domnia Tatălui, corespunzând fricii de Dumnezeu; 2. Domnia Fiului, corespunzând credinței în Iubire; 3. Domnia Sfântului Duh, corespunzând Contemplației.

Numărul 1: Ați pomenit de *Numărul 3*. Din păcate, lipsește. E foarte implicat în campania electorală, ca și *Numărul 7*. De altfel, amândouă aceste numere s-au autoprezentat destul de amplu și de tranșant pe micul ecran. Așa încât vă fac cunoștință cu *Numărul 4*.

Arina: Sunt bucuroasă să vă cunosc, Domnule 4. Sunteți rudă cu *Numărul 2*, doar $4 = 2^2$.

Cabiria: Grecii considerau că Lumea este formată din 4 elemente: *apă, pământ, aer, foc*; camera mea are 4 pereți, anul are 4 anotimpuri, există 4 puncte cardinale.

Sorin: Îmi permiteți, Domnule 1, să argumentez personalitatea colegului Dv., Domnul 4?

Numărul 1: De ce nu?

Sorin: Aristotel deosebea patru tipuri de cauze: *materiale*; *formale*; *eficiente* și *finale*, iar Pitagora împărțea matematica în patru secțiuni (quadrivium): *teoria numerelor absolute* sau *aritmetica*; *teoria numerelor aplicate* sau *muzica*; *teoria mărimilor în stare statică* sau *geometria* și *teoria mărimilor în stare de mișcare* sau *astronomia*.

Arina: Platon susținea că ideea de frumos se caracterizează prin: *ordine*, *simetrie, armonie* și *măsură*.

Cristina: Mitologiile sunt și ele o mărturie. De pildă, mitologiile Mesopotamiei cinstesc patru zei fundamentali, iar mitologia iraniană susține că lupta dintre bine și rău durează patru epoci. Buddha proclamă patru adevăruri esențiale: *existența suferinței*; *cauzele ei*; *posibilitatea eliberării suferinței*; *calea suprimării suferinței*.

Platon

Cabiria: Subliniez că patru este numărul literelor care alcătuiesc numele celui dintâi om, *Adam!*

Cristina: Vreau să adaug că, pentru indienii din America de Nord, patru reprezintă un principiu de organizare și o forță. În viziunea lor, spațiul e împărțit în patru părți; timpul are patru măsuri (*ziua, noaptea, luna, anul*); plantele sunt constituite din *rădăcină, tulpină, floare* și *fruct*; vârstele reprezintă: *copilăria, tinerețea, maturitatea* și *bătrânețea*; patru sunt virtuțile fundamentale

ale bărbatului: *curajul*, *puterea de a îndura, generozitatea, fidelitatea*, iar ale femeii: *îndemânarea, ospitalitatea, loialitatea, fecunditatea*.

Arina: Aici e locul să-l amintim pe vestitul medic grec Hipocrat (c.460-c.377 î.e.n.), care deosebea patru tipuri de temperament: *sangvin, coleric, flegmatic, melancolic.*

Cristina: Lucrurile se leagă. Carl Gustav Jung admite că procesele psihice se bazează pe patru funcții fundamentale ale conștiinței: *gândirea, sentimentul, intuiția, senzația*.

Sorin: Într-adevăr, acestea sunt înzestrările psihologice cu care ne naștem, dar cred că ar trebui adăugat, tot în spiritul viziunii lui Jung, că psihicul uman este construit dintr-un ansamblu de structuri arhetipale care cuprind: *binele*; *eul*; *umbrele*; *complexul animus-anima*.

Numărul 1: Și acum să vi-l prezint pe *colegul 5*.

Cabiria: Aici sunt multe de comentat. La început de tot, oamenii numărau pe degetele unei singure mâini. La origine, cuvântul sanscrit care-l desemnează pe cinci, *panca,* înseamnă *mână* sau, mai precis, *întinde mâna.* Limba română l-a moștenit din latinescul *quinque*.

Arina: *Numărul 5* reprezintă suma lui 2 și 3, deci suma primului număr par cu primul număr impar sau suma primelor două numere prime. Situat în centrul primelor nouă numere, el ilustrează *unirea, echilibrul, armonia*.

Cabiria: Arina, vreau să remarc rolul *Numărului 5* ca principiu vital la hinduși și ca cifră fastă în Islam.

Cristina: Din câte știu, hindușii considerau că fiecare om este alcătuit din cinci elemente: *conștiință, reprezentări, forțele karmei*, *simțuri, învelișul material*.

Arina: Eu aș aminti primele cinci cărți ale Vechiului Testament, atribuite lui Moise: *Pentateuhul* (în limba

greacă, pente = 5, têukhos = carte), în denumirea ebraică *Tora = Legea,* și care cuprinde: *Geneza, Exodul, Leviticul, Numerii, Deuteronom.*

Sorin: În America, sacralizarea numărului 5 era legată de procesul de germinare a porumbului, a cărui primă frunzuliță iese din pământ, de regulă, la cinci zile după însămânțare, glifa lui 5 fiind, frecvent, o mână. Iar la azteci, Zeul 5 (Zeul Porumbului Tânăr) era patronul atât al muzicii, cât și al dansului.

Cabiria: Apropo, chinezii foloseau în muzică, încă din Vechime, scara pentatonică, adică cea care cuprinde doar cinci sunete în cadrul octavei.

Sorin: Mie 5 îmi evocă trandafirul cu 5 petale, dar și Steaua lui Venus, simbol al feminității.

Arina: N-o să mă credeți, pe 5 îl găsim și în sport. Pentatlonul (în greacă, pente = 5, athlon = luptă) reprezintă cele cinci exerciții atletice ale Antichității: *lupte, alergări, sărituri, aruncarea discului* și *aruncarea suliței*.

Cristina: Să părăsim sportul, pentru a menționa că există cinci tipuri de comunicare: *interpersonală; interpersonală diadică; de grup; publică* și *de masă.*

Numărul 1: Vecinul *Numărului 5* este *Numărul 6*. Numele lui provine din sanscrită – *șaș* –, care, cu mici modificări fonetice, poate fi recunoscut în latină – *sex*, în franceză – *six*, în slavonă – *șesti*, în română – *șase*. E, oare, un simplu accident fonetic?

Arina: Domnule 6, sunteți, de fapt, un număr perfect! Ce e mai mult decât adevărul că Lumea a fost creată în șase zile!

Sorin: Șase este numărul hexametrului biblic, iar hexagonul stelat reprezintă pecetea lui David sau scutul lui Solomon (Hexagrama a fost simbolul secret al preoților astronomi, fiind, apoi, adoptat de regii israelieni).

Cabiria: Convingerile musulmanilor se întemeiază pe șase izvoare: *Allah, Profetul Mahomed, Coranul, Angeologia, Cărțile* (*Tora* lui Moise, *Psalmii* lui David, *Evangheliile*) și *Escatologia* (credința în viața viitoare).

Numărul 1: Și acum, grațiosul *Număr 8*. Are și el origine sanscrită, unde i se spunea *așto*.

Arina: Opt al nostru provine din latinescul *octo.*

Sorin: Bun! Să trecem la semnificații.

Cabiria: Opt este numărul petalelor de lotus! În muzică, vorbim de *octavă*.

Arina Opt e legat de Veșnicie! Sfântul Augustin vorbește despre Ziua a Opta ca despre aceea care marchează Eternitatea.

Numărul 1: Ce vă spune *Numărul 9*, pe care am plăcerea să vi-l prezint acum?

Sorin: Mie îmi evocă cele nouă muze ale Antichității grecești: *Clio* (muza istoriei), *Euterpe* (muza muzicii), *Thalia* (muza comediei), *Melpomene* (muza tragediei), *Terpsichore* (muza dansului), *Erato* (muza poeziei erotice), *Polimnia* (muza poeziei religioase), *Urania* (muza astronomiei), *Caliope* (muza poeziei epice, a elocinței). Cred că n-am omis pe nici una dintre cele nouă fiice ale lui Zeus.

Cristina: Mie 9 îmi evocă cele 9 ceruri de care vorbește Dante Alighieri, în *Infernul.*

Arina: Îmi amintesc că bunicii mele îi plăcea să spună: „*Peste nouă mări și nouă țări și peste nouă ape mari*“ (Povestea lui Harap Alb), pentru a sugera o mare depărtare.

Numărul 1: Am mai putea observa că 9 este ultima și cea mai mare dintre unitățile exprimate printr-o singură cifră. Originea sanscrită *nevan* se simte în latinescul *novem*, de unde, în română, *nouă*, în franceză *neuf* etc.

Arina: Despre ultimul membru al Clubului, *Numărul 10*, ce putem afla?

Numărul 1: Domnul 10 are o poziție privilegiată. Încheie decada primelor numere și reprezintă baza de numerație cel mai folosită.

Arina: Deși este cel din urmă număr din grupul unităților simple, spre deosebire de confrații Domniei Voastre este notat prin două cifre: 1 și 0.

Numărul 1: Iată denumirile lui zece în diferite limbi indo-europene: în avestă – limba lui Zarathustra (Zoroastru) – se spunea *desa;* în greacă – *deka*; în latină – *decem*, care în limba română a devenit *zece*.

Cabiria: *Decem* e înrudit fonetic cu *digiti,* degete. Omul are 10 degete.

Numărul 1: În germană, *Zehn* = 10 se trage din *Zehe*, care înseamnă degetele de la picioare!

Cristina: Chiar dacă e o paranteză în discuția noastră, aș adăuga că 10 este numărul categoriilor lui Aristotel: *esența, cantitatea, calitatea, relația, locul, timpul, situația, posesia, acțiunea, proprietatea*.

Sorin: Eu sunt fascinat de rolul *Numărului 10* în *Cabală*.

Arina: Ce legătură au misterele, chestiile oculte cu un număr atât de important ca 10? Și ce este, de fapt, *Cabala*?

Cabiria: Să luăm, de exemplu, *Lexiconul Herder al întâlnirii iudeo-creștine*, apărut la Editura Humanitas, în anul 2000. Aici, avem următoarea definiție: „*Textual, Cabala înseamnă tradiție, transmitere, prelucrare și continuare. Prin ea se înțelege o mișcare cu caracter mistico-spiritual... a iudaismului...*“

Cristina: Mie mi se pare mai potrivită definiția lui Alexandru Șafran, fostul șef-rabin al Cultului Mozaic din România și președinte al Federației Comunităților

Evreiești din România. Cartea sa, *Înțelepciunea Cabalei*, a fost tradusă în toată lumea. La noi, a apărut la Editura Hasefer, în anul 2000. „*Cabala* – spune Alexandru Șafran – *este o tradiție orală elaborată religios, spiritual și intelectual de către o elită, care îl face pe om mai înțelept, îl ajută să pătrundă în mister, în esență*".

Sorin: De fapt, ideea de bază a *Cabalei* este aceea că *Biblia,* mai exact *Vechiul Testament,* reprezintă un mesaj codificat, care poate fi înțeles numai prin aplicarea unor tehnici de decriptare ce leagă cuvintele de numere. Prima dintre aceste tehnici poartă numele de *Gematria*. Ea presupune însumarea numerelor corespunzătoare literelor care alcătuiesc un cuvânt, după care se caută alte cuvinte caracterizate prin aceeași sumă a literelor, în ideea că între ele trebuie să subziste o legătură tainică și că prin înlocuirea unui termen cu altul se obține sensul profund al textului.

Arina: Parcă încep să pricep.

Cabiria: Sorin trebuia să precizeze că literele alfabetului ebraic au corespondență în numere. Prima literă a acestui alfabet, corespunzând lui *a*, se numește *alef* și este egală cu 1; cea de a doua literă, *bet,* este egală cu 2; cea de a treia, *ghimel,* cu 3 ș.a.m.d. Iată numerele ebraice și denumirile lor:

1 *alef*	6 *waw*	20 *kaf*	70 *ašn*	200 *reš*
2 *bet*	7 *zain*	30 *lamed*	80 *pe*	300 *šin*
3 *ghimel*	8 *het*	40 *mem*	90 *șade*	400 *taw*
4 *dalet*	9 *tet*	50 *nun*	100 *kof*	
5 *hé*	10 *yod*	60 *samek*		

Arina: Aș vrea să-mi spuneți de unde vine cuvântul *Cabală*.

Sorin: Etimologic, de la ebraicul *qabbalah*, care înseamnă *tradiție*. Mie mi se pare fascinantă ipoteza că are drept inițială litera *kaf*. Or, după cum se observă din tabelul pe care l-am prezentat, *kaf* este egală cu 20, iar *bet* cu 2. Deci *Cabala* însumează pe 20 cu 2, obținându-se 22. Particula *la* de la sfârșitul cuvântului *Cabală* înseamnă în ebraică *putere*. În consecință, înțelesul cuvântului *Cabală* este *puterea lui 22*.

Arina: Până la urmă, care este în *Cabală* rolul lui 10?

Sorin: *Biblia* ne spune că *Legea* i-a fost revelată lui Moise pe Muntele Sinai prin *Cele Zece Porunci.*

Arina: Adică prin *Decalog*. În greacă, *deka* = zece, *logos* = cuvânt.

Cabiria: Cabala menționează, de la început, că Domnul a creat Lumea prin 32 de căi ale misterioasei sale înțelepciuni.

Sorin: Aceste 32 de căi sunt compuse din cele 10 numere fundamentale – denumite *sefiroturi* – și cele 22 de litere ale alfabetului ebraic.

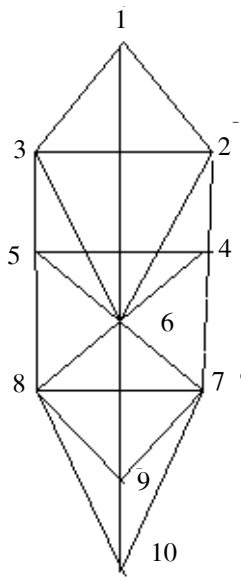
Arina: *Sefirot* înseamnă în ebraică număr?

Cabiria: Ca să înțelegi mai ușor, Arina, îți precizez că rădăcina unui cuvânt ebraic se prezintă sub forma unui număr mic de consoane, între care se inserează vocale; acestea dau sensul cuvântului. Ansamblul consoanelor constituie scheletul consonantic, i-aș zice partea cea mai rezistentă a cuvântului. Or, rădăcina consonantică sau scheletul consonantic al substantivului *sefirot*, ca și al verbului *safer,* este *sfr*. Inserând vocale, cuvintele devin *sefirot* și *safer* (*număr* și *a număra*). De altfel, în arabă, înrudită cu ebraica, ambele fiind limbi semitice, scheletul consonantic *sfr* dă *sifr* (*cifră, zero*).

Sorin: O mică precizare. Alexandru Șafran susține că *sefirot* vine de la verbul *safer* = a socoti, a număra.

Arina: Cum arată cele zece sefiroturi, adică primele zece numere?

Sorin: Am în agenda mea desenul lor. Aceste zece sefiroturi reprezintă:



1. Coroana
2. Înțelepciunea
3. Inteligența sau Spiritul
4. Mila
5. Rigoarea
6. Frumusețea
7. Victoria
8. Gloria
9. Fundamentul
10. Regatul

Fig. 2. *Cele zece sefiroturi*

Cabiria: Practicanții *Cabalei* fac asocieri incitante între număr și cuvânt.

Sorin: Alegând cuvinte frecvent folosite în *Vechiul Testament,* putem înțelege în ce fel procedau israeliții pentru a obține corespondențe între nume și numere. Să luăm, de pildă, urmându-l pe orientalistul Oskar Fischer, strălucit cercetător al mecanismului Gematriei (*Der Ursprung des Judentums in Lichte alttestamentlicher Zahlensymbolik*, Leipzig,

1917), numele proprii de cea mai mare importanță din acest text, și anume *Iehova (Dumnezeu), Moise, Sinai, Tora*, și să calculăm căror numere le corespund:

Numele proprii	**Valoarea literelor**				**Total**
Iehova	yod = 10;	hé = 5;	waw = 6;	hé = 5	26
Moise	mem = 40;	waw = 6;	šin = 300;	hé = 5	351
Sinai	samek = 60;	yod = 10;	nun = 50;	yod = 10	130
Tora	taw = 400;	waw = 6;	reš = 200;	hé = 5	611

Descompunem sumele:

26	2	351	3	130	2	611	13	26 = 2 x 13
13	13	117	3	65	5	47	47	351 = 27 x 13
1		39	3	13	13	1		130 = 10 x 13
		13	13	1				611 = 47 x 13
		1						

Cabiria: Observ că numele lui Dumnezeu, al lui Moise, al locului unde Iehova i s-a arătat acestuia – Muntele Sinai – și *Legea* care i-a fost revelată au în comun numărul 13.

Sorin: Revenind la *Vechiul Testament* și oprindu-ne la grupul patriarhilor lui Israel, tot după Oskar Fischer, se obține:

Numele	**Corespondentul numeric al literelor**	**Total litere**
Ab-Hamon	alef=1; bet = 2; hé = 5; mem = 40; waw = 6; nun = 50	104
(Abraham, Avram) Isaac	yod = 10; sade = 90; het = 8; kof = 100	208
Iacob	yod = 10; ain = 70; kof = 100; bet = 2	182
Israel	yod = 10; šin = 300; reš = 200; hé = 5; alef = 1; lamed = 30	546
Iosif	yod = 10; waw = 6; samek = 60; pé = 80	156

Sorin: Prin descompunerea numărului total al literelor obținute: 104, 208, 182, 546, 156, apare același factor comun 13. Oskar Fischer susține că *13* este numărul lui Iehova!

104	2	208	2	182	2	546	2	156	2	104 = 2 x 13
52	2	104	2	91	7	273	3	78	3	208 = 16 x 13
26	2	52	2	13	13	91	7	39	3	182 = 14 x 13
13	13	26	2	1		13	13	13	13	546 = 42 x 13
1		13	13			1		1		156 = 12 x 13
		1								

La Clubul Prieteniei

Înarmată cu atâtea cunoștințe noi, Arina se decide să viziteze și alte cluburi. Așa ajunge la *Clubul Prieteniei*. În timp ce bea un suc de ananas, aude următoarea conversație:

Numărul 1: Am aflat că, ieri, *Numărul 28* a dat o petrecere a numerelor prietene. Fiindcă există o *Lege a prieteniei dintre numere*.

Numărul 2: În ce constă această lege?

Numărul 1: Două numere sunt declarate prietene dacă, adunând factorii cu care se divide primul dintre ele, îl găsim pe cel de al doilea și, tot astfel, dacă adunăm factorii care divid pe cel de al doilea îl găsim pe cel dintâi.

Numărul 2: Nostim! Când s-a observat asta?

Numărul 1: Încă din Vechime oamenii au sesizat această proprietate la numerele 220 și 284. Într-adevăr, prima pereche a fost descoperită în anul 540 î.e.n. de către Pitagora, unul dintre cei mai străluciți teoreticieni ai numerelor.

Numărul 2: Ia să văd dacă e adevărat: *220* se divide cu 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110. Le adun și avem 284. Să fac aceeași operație și pentru 284. Se divide cu 1, 2, 4, 71, 142. Le adun și dă exact 220.

Numărul 1: Oamenii au fost impresionați de această proprietate, încât numerele prietene au pătruns în magie, în astrologie, în vrăjitorie, au fost utilizate la stabilirea horoscoapelor. Nu mai spun câte amestecuri de poțiuni s-au făcut pentru câștigarea dragostei și câte afaceri cu fabricarea talismanelor!

Numărul 2: Și cum a evoluat cunoașterea „intimității" numerelor prietene?

Numărul 1: La 1636, matematicianul francez Pierre de Fermat (1601-1665) a descoperit a doua pereche de numere prietene: 17 296 și 18 416. În secolele următoare, au fost identificate câteva sute.

Numărul 2: Deci au trecut mai bine de două milenii până la descoperirea celei de a doua perechi!

Elita numerelor

În autobuzul care o duce acasă, Arina surprinde o convorbire între două tinere pe care le văzuse la Club. Își spuneau pe nume: Elly și Lidia.

Lidia: Ce înțelegi tu prin „elita numerelor"?

Elly: Simplu. Mulțimea numerelor perfecte.

Lidia: Știu ce înseamnă *numere prietene*, dar n-am auzit de *numere perfecte*.

Elly: Uite, de exemplu, 6 este un număr perfect, întrucât dacă îi adunăm factorii dăm tot peste 6 (1 + 2 + 3).

Lidia: Există și alte numere perfecte?

Elly: Sigur. Încă în Antichitate, pe lângă 6 erau cunoscute alte trei numere perfecte: 28, 496 și 8128.

Lidia: Să mă conving cu calculatorul meu:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 ;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 .$$

Ai dreptate. Pentru 8 128 te cred pe cuvânt.

Elly: În Antichitate, s-a mai observat că unitățile simple cuprind un singur număr perfect. Printre zeci, sute și mii, de asemenea, se găsește doar câte un singur număr perfect.

Lidia: Exceptând Antichitatea, au mai fost identificate și alte numere perfecte?

Elly: Da, dar sunt foarte lungi. Țin minte că al șaptea număr perfect descoperit în secolul al XVI-lea este de ordinul bilioanelor.

Lidia: Mi-ar plăcea să calculez și eu numere perfecte. Dă-mi formula magică.

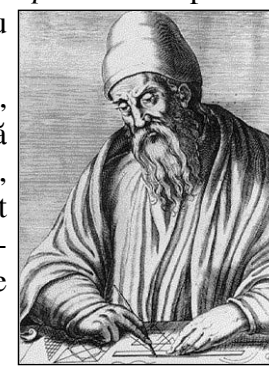
Elly: Matematicianul grec Euclid (sec. III î.e.n.), căruia îi datorăm prima expunere sistematică a geometriei și atâtea contribuții în aritmetică, a dat o foarte frumoasă teoremă. Ți-o spun în termenii moderni: *Condiția necesară și suficientă ca un număr natural par n să fie perfect este ca n să fie de forma*:

$n = 2^t (2^{t+1} - 1) = 2^t \times p$,

unde *t* este un număr natural, iar *p* un număr prim.

Lidia: Există formulă și pentru numerele perfecte impare?

Elly: Aici e aici. De la Euclid încoace, lumea se întreabă în zadar dacă există numere perfecte impare, ținând cont că nu s-a găsit niciodată vreunul și nu s-a dovedit că ar exista un astfel de specimen.



Euclid

Carismaticul π pe post de amfitrion

Arina ajunge, în sfârșit, la un club select: *Clubul Numerelor Măiestre*. Portarul îi refuză accesul pe motiv că nu este în ținută de

seară. După îndelungi parlamentări, ea îl înduplecă spunând că este o turistă venită din depărtări, care nu cunoaște criteriile de admitere în Club, și că dorește să stea de vorbă cu Maestrul π .

Interiorul Clubului o impresionează: vitralii, lambriuri, picturi, mobilă stil. Într-un salon arab, îl zărește pe *Numărul i,* traversează, apoi, un fel de galerie cu oglinzi – à la Versailles – și ajunge în bibliotecă. Aici îi vede pe $\sqrt{2}$, care meditează, și pe *Numărul C*, care studiază un manuscris. Călătoria ei se întrerupe atunci când, într-un salon Louis XV, dă cu ochii de *Numărul* , care discută cu *Numărul e*. Portarul o avertizase că Maestrul obișnuiește să-și petreacă serile dialogând cu tânărul său prieten. La nedumerirea Arinei, care găsește că între cei doi e o diferență de vârstă enormă, de vreo opt secole, un tânăr se oferă să-i dea lămuririle de rigoare. Amiciția aceasta se bazează pe faptul că destinele acestor două numere sunt strâns împletite. Când, în 1873, s-a descoperit identitatea lui *e* – adică transcendența lui – matematicienii au intuit că vor putea găsi o cale pentru a decide asupra naturii lui . Și, într-adevăr, nouă ani mai târziu, matematicianul german Herman Ferdinand von Lindemann (1852-1939) a realizat această performanță, folosind ingenios o formulă a matematicianului elvețian Leonhard Euler (1707-1783), bazată pe virtuțile *Numărului e*.

Arina Transcendența lui și *e*...

Tânărul: Numărul care nu poate fi rădăcina unei ecuații algebrice de forma: $a_0e^n + a_1e^{n-1} + a_2e^{n-2} + \ldots + a_{n-1}e + a_n = 0$ cu coeficienți raționali e transcendent. Cred că ați citit cartea despre numere scrisă de Florica T. Câmpan. Se face acolo referire la strânsa relație dintre și *e* și se arată că cercul – cea mai perfectă curbă – nu poate exista fără π , iar spirala logaritmică – singura curbă asemenea ei înseși – nu poate există fără *e*.

Arina și tânărul se aproprie de masa celor doi prieteni.

Arina: Bună seara! Vă rog să-mi îngăduiți să mă prezint: sunt Arina Stoenescu, elevă la Liceul „Spiru Haret" din București.

: Bine ai venit la noi!

Arina: Maestre, din lecturile mele am aflat multe despre Dv. și am dorit să vă cunosc personal.

: Ce ai mai dori să știi despre mine?

Arina: Întâi, v-aș ruga să-mi spuneți ce vă amintiți din anii copilăriei.

: Nu prea multe.

Arina: Cui i-a venit ideea că lungimea cercului se poate măsura cu ajutorul diametrului său?

: Probabil, mai multora. Or fi realizat că lungimea unui cerc este cam de trei ori mai mare decât diametrul lui. Evident, nu se folosea termenul cerc sau diametru. Babilonienii pretindeau că valoarea mea este egală cu 3,125, iar egiptenii că este egală cu 3,160.

Arina: Toate popoarele v-au evocat. Sunteți pomenit pe tăblițele de lut ale babilonienilor, în papirusurile egiptene, în scrierile hindușilor, ca și în cele din sudul Mexicului, din Honduras sau din Guatemala. Și în *Biblie* se vorbește despre Dv. În *Cartea a Treia a Regilor (7:23),* se spune că la construirea casei regale a lui Solomon a fost turnat în aramă un vas de 10 coți de la o margine la cealaltă, rotund de jur-împrejur, înalt de cinci coți și gros cât îl cuprindea o sfoară lungă de 30 de coți. Ce v-a marcat viața?

π : Cuadratura cercului!… Să vă explic. Cuadratura cercului constă în construirea unui pătrat având aceeași arie cu a unui cerc dat, numai cu ajutorul riglei și al

compasului. Problema aceasta a trezit curiozitate, a preocupat timp îndelungat pe oamenii de știință și pe amatori, a dezlănțuit multe pasiuni.

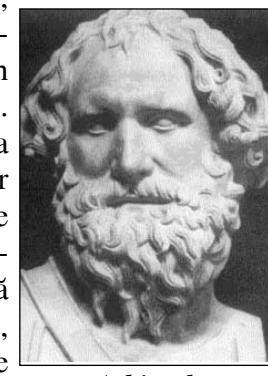
Arina: De care matematician vă simțiți cel mai apropiat?

π : Bineînțeles, de Arhimede (c. 287-212 î.e.n.). De la acest mare învățat grec au rămas, în lucrarea *Măsurarea cercului,* următoarele teoreme:
– Aria unui cerc este egală cu aria unui triunghi dreptunghic, care are drept catete raza și lungimea cercului;
– Raportul dintre aria cercului și aria pătratului circumscris lui are o valoare apropriată de — ;

– Raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este cuprins între — și $3\frac{1}{7}$, adică $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Să reținem că Arhimede a lucrat cu un poligon de 96 de laturi și a calculat primele două zecimale exacte ale mele.

Arina: Era de așteptat! Carismaticul π se pretinde discipolul vestitului Arhimede, care a marcat aritmetica, geometria și fizica și care a fost un precursor al calculului integral. (Apoi, cu voce tare) Goana după identificarea unui număr cât mai mare de zecimale exacte seamănă cu urmăririle din filmele polițiste. Am impresia că matematicienii și, mai ales, amatorii au fost cuprinși de o adevărată nebunie mărind



Arhimede

necontenit numărul laturilor poligoanelor, pentru a obține un număr cât mai mare de zecimale.

: Dacă, în secolul al III-lea e.n., chinezul Liu Huei a obținut cinci zecimale exacte cu ajutorul unui poligon de 3 072 de laturi, Djemšed al Kași, născut în Iran, dar lucrând la Observatorul din Samarkand (Uzbekistan), a obținut, în secolul al XV-lea, 17 zecimale exacte folosind un poligon cu peste opt sute de milioane de laturi. Europenii, rămași în urmă, realizează progrese mult mai târziu, prin belgianul Adrianus Romanus (1561-1615), pe adevăratul său nume Adriaen Van Roomen, cel mai celebru dintre emulii matematicianului francez François Viète (1540-1603), care ne este cunoscut pentru pașii realizați spre simbolizarea în algebră și pentru determinarea a nouă zecimale ale lui . În 1590, el obține 15 zecimale cu ajutorul unui poligon cu peste un miliard de laturi. Doar datorită unui filolog de meserie – italianul Giuseppe Giusto Scaliger (1540-1609) – europenii îi depășesc pe al Kași, identificând, mai întâi, 35 de zecimale pe un poligon cu 4 pentalioane de laturi.

Arina: Cu cifrele astea astronomice mi se face rău!

: Împătimiții, contaminați de „molima“ cuadraturii și urmărind obținerea unei precizii sporite, ajung la 72 și chiar la 100 de zecimale. Astronomul John Machin (1685-1715) a obținut 100 de zecimale exacte. Matematicianul englez W. Jones (1675-1749) publică, în 1706, calculele lui Machin și folosește pentru prima oară notația lui pentru raportul dintre lungimea cercului și diametrul lui. El m-a botezat cu litera greacă π, de la cuvântul *periphereia,* care înseamnă *circumferință* (marginea cercului).

Arina: Dar notația, după câte știm, a fost adoptată 50 de ani mai târziu, când Euler a folosit-o în *Mecanica* sa.

: Corect. Nu mai spun că goana după zecimale s-a întețit. În 1719, matematicianul francez Thomas F. de Lagny (1660-1734) a calculat 127 de zecimale. Euler, desăvârșit calculator, a reușit în 80 de ore să ajungă la aceeași performanță și să corecteze în același timp o eroare a lui Lagny. În sfârșit, în 1873, William Shanks (1812-1882) ajunge să calculeze 707 zecimale, de data aceasta cu ajutorul logaritmilor. Drept omagiu pentru performanța sa, cele 707 zecimale figurează pe o friză de la Palatul Descoperirilor din Paris. O dată cu apariția calculatorului electronic, performanțele au crescut fantastic. În 2005, după informația inserată de conferențiarul francez Benoit Rittaud în revista „L'Histoire", nr. 304, din decembrie 2005, s-a ajuns la peste o mie de miliarde de zecimale.

Arina: Am citit că, în toate timpurile, cuadratura cercului a exercitat un fel de vrajă universală. Din China până în Anglia, din Iran până în Franța, din India până în Egipt, în Antichitate, ca și în epoca Renașterii, pe timp de război sau de pace, pasionații cuadraturii cercului au lucrat fără răgaz. În 1775, Academia Franceză a refuzat primirea memoriilor care tratau despre cuadratura cercului, deoarece amatorii nu mai pridideau să trimită lucrări eronate, încredințați de geniul lor. E adevărat că oamenii au ajuns să parieze pe averea lor că au descoperit soluția?

: Sigur că da. Un mare fabricant din Lyon, convins că a dezlegat taina lui π, a pierdut la un pariu 8 000 de franci, iar cavalerul de Caussans a pus rămășag pe întreaga lui avere de 300 000 de franci!

Arina: Dincolo de asta, încercările de a dezlega taina lui au ajutat, prin contribuții colaterale, la dezvoltarea matematicii.

: Firește. Dacă celebrul geometru grec Hipocrat din Chios (secolul al V-lea î.e.n.) a realizat că nu poate dovedi cuadratura cercului, a arătat, în schimb, că există așa-numitele *lunule*, care au arii egale cu unele pătrate.

Arina: De lunule n-am auzit.

: Lunulele sunt figuri plane mărginite de două arcuri de cerc cu concavitatea îndreptată în același sens. Hipocrat din Chios a făcut cuadratura lunulei având ca margine superioară un semicerc și ca margine inferioară un arc de cerc. Arhimede a arătat că lunulele nu sunt singurele suprafețe cuadrabile, că există și alte cazuri, mai complicate.

Arina: În tentativele de găsire a cuadraturii au fost date la iveală giuvaere matematice, ca în cazul matematicianului belgian Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667). Dar marele câștig al matematicienilor a fost că și-au dat seama că nu sunt de ajuns zeci de zecimale, că ar trebui o mie sau, poate, mai multe mii, ca să se lămurească natura lui .

π : Matematicienii au înțeles că eu nu semăn cu un număr fracționar, ci mai degrabă cu unul irațional. Și așa am ajuns să constitui un imbold al căutărilor, să contribui la orientarea cercetărilor matematice moderne.

Arina: După câte știu, chiar și mai înainte, lucrările stimulate de căutarea cuadraturii cercului au adus înnoiri în matematică, variate încercări ingenioase legate de metoda lui Arhimede, de pildă, *metoda izoperimetrelor* (adică a poligoanelor cu același perimetru), folosirea produselor și fracțiilor continue infinite.

Apariții fermecătoare, metodele analitice s-au dovedit a fi rodnice. Acum aș întreba: a existat, la greci, o criză provocată de neînțelegerea iraționalelor?

: A existat, dar au depășit-o atunci când s-a ajuns la concluzia că sunt mai multe feluri de numere iraționale.

Arina: Adică și , și *Numărul de Aur*.

: Vă semnalez ceva care i-a stupefiat pe matematicieni. Începând cu Newton (1642-1727) și cu Euler, s-a observat că unele serii infinite de numere fracționare au o sumă care se explică prin , și aceasta pe bază de calcule în care cercul nu-și bagă de loc coada. S-a pus atunci întrebarea dacă geneza mea e pur geometrică. Mister! În plus, Georges Louis Leclerc, conte de Buffon (1707-1788), naturalist și scriitor francez, unul dintre precursorii concepției evoluționiste, a arătat că intervine în probabilități.

Sir Isaac Newton

Arina: M-aș grăbi să adaug – mai mult ca să mă confirmați – că, în preocupările pentru decriptarea tainelor *Numărului* , s-a implicat Johann Heinrich Lambert (1728-1777), fizician, astronom, matematician și filosof de origine germană, care a demonstrat iraționalitatea lui . Apoi, matematicianul german Ferdinand von Lindemann a stabilit riguros, în 1882, că numărul π este transcendent și că, deci, cuadratura cercului cu rigla și compasul este imposibilă. El a dezvoltat metode de rezolvare a ecuațiilor de orice grad, folosind funcțiile transcendente.

: Văd că știți multe despre viața mea.

Arina: Viața Domniei Voastre ar putea face obiectul unui roman sau al unui serial TV.

: Apropo de literatură, aflați că Aristofan (445-386 î.e.n.) rămâne primul care m-a imortalizat în beletristică. El l-a ales ca protagonist pe Menton, pe care l-a înfățișat în *Orașul Păsărilor* târându-și cu greu compasul și rigla sa enormă pentru a transforma cercul în pătrat.

Arina: Toate bune, dar nu ne-am liniștit cu interogațiile privindu-l pe . Cu ajutorul calculatorului i se determină tot mai multe zecimale.

: Da de unde! Dacă transcendența lui a fost un rezultat care i-a încântat pe matematicieni la sfârșitul secolului al XIX-lea, iată că la sfârșitul secolului al XX-lea ei au început să considere acest rezultat ca prea abstract, fiindcă nu spune nimic despre chestiunea-cheie a repartizării zecimalelor. S-au găsit peste o mie de miliarde de zecimale; dar cum apar ele, sunt extrase la Loto? Deci se anunța o nouă cursă.

Arina: Poate o să realizez eu un astfel de scenariu. Înainte de a-l scrie, voi consulta site-ul lui Bores Gourevich: și lista aproximațiilor exotice ale Numărului . Trebuie să-mi procur și revista „*La Recherche*“ din 24 noiembrie 2005, care a consacrat un dosar lui .

În prelungirea discuției de la Club: *Numărul e*

După ce îi mulțumește Maestrului , Arina pleacă spre casă. În metrou, îl întâlnește pe colegul ei Dorel. După un scurt dialog protocolar, ea îl roagă să-i spună tot ce știe despre legătura dintre π și e.

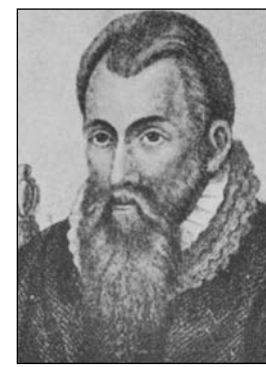
Dorel: Păi, să începem, Arina: în 1873, matematicianul francez Charles Hermite (1822-1901) a demonstrat transcendența lui *e*.

Arina: Și cum s-a ajuns de aici la π ?

Dorel: Cinci ani mai târziu, Lindemann a avut ideea ingenioasă de a folosi formula stabilită de Euler, și anume: $e^{i\pi} = -1$ și de a ține seama că ecuația pe care a găsit-o prezintă o oarecare analogie cu ecuația pe care Hermite a scris-o pentru *e*, deși mai complicată.

Arina: Bine, dar *Numărul e* cum s-a născut?

Dorel: Geneza lui e legată de apariția logaritmilor. Părintele „mirificilor logaritmi" este matematicianul scoțian John Napier (Neper) (1550-1617). I-au fost necesari 20 de ani până să le vină de hac. Etimologic, *logaritm* vine din grecescul *logos* = raport și *arithmos* = număr. Iar Napier a inventat logaritmul în dorința simplificării calculelor trigonometrice, atât de utile astronomilor, generalizând ideea mai veche a comparării progresiilor aritmetice cu cele geometrice. Se cunoaște că logaritmul reprezintă puterea la care trebuie ridicat un anumit număr pozitiv, numit *bază*, spre a obține numărul dat. Logaritmul unui număr x în bază a este y, dacă $x = a^y$; avantajul apare lesne dacă baza folosită este 10. Știm că $10^2 = 100$, deci 2 este logaritmul lui 100 în baza 10 , iar 10^{10}, adică 10 000 000 000, are logaritmul 10.



John Napier (Neper)

Arina: Și ce are asta cu *Numărul e*?

Dorel: Aici e cheia, pentru că baza în care a lucrat Napier a fost *e*.

Arina: Deci îl cunoștea pe *e*.

Dorel: Habar nu avea de existența lui. L-a dibuit pragmatic. A găsit că era cel mai convenabil, cel mai comod și cel mai eficace număr cu care se putea descurca.

Arina: Nostim! Cam ce valoare are *e*?

Dorel: Valoarea *Numărului e* arată astfel; îți dau numai șase zecimale: $e = 2{,}718281\ldots$

Arina: Dar logaritmul lui *e*?

Dorel: Isaac Newton a arătat că seria

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \text{ are drept logaritm pe 1.}$$

Arina: Îmi place!

Dorel: Iar Euler a notat prin „l" logaritmii lui Neper cu baza *e* și a calculat 23 de zecimale fără să constate vreo urmă de periodicitate. Au fost calculați, apoi, și logaritmii în baza 10. Noi, la școală, lucrăm cu logaritmi zecimali. Tot Euler a exprimat, cu ajutorul lui *e*, cosinusul și sinusul și a descoperit surprinzătoarea formulă care leagă *Numărul* π de *e*, adică $e^{i\pi} = -1$.

SISTEME DE NUMERAȚIE

Arina își pune în ordine fișele de studiu. Începe cu notele referitoare la sistemele de numerație primitive egiptean și aztec și continuă cu vechile tipuri de numerație la greci și la romani, cu sistemele de numerație alfabetică folosite de evrei, greci și arabi, apoi cu cele care se referă la sistemele de numerație de poziție: sumerian, babilonian și mayaș și, în sfârșit, cu cele referitoare la sistemele de numerație chinez și indian. Un capitol distinct al fișierului cuprinde notele despre sistemul de numerație la români.

Cu șapte hieroglife egiptenii numărau până la un milion

Încă din mileniul al III-lea î.e.n., egiptenii au stabilit un sistem de numerație zecimal. Acest sistem folosea semne speciale pentru unități, zeci, sute, mii și mergea până la un milion. Nodurile de ordin superior erau plasate înaintea celor de ordin inferior. Deși pentru zero egiptenii nu au avut un semn special, l-au mânuit implicit, lăsând un loc gol acolo unde trebuia să figureze. Sistemul era greoi, fapt care explică numărul ridicat de greșeli detectate în calculele egiptenilor.

Din vremuri îndepărtate, egiptenii înregistrau unitatea printr-o liniuță verticală (un bețișor), doi cu două liniuțe verticale ș.a.m.d. Pentru a nota un număr ca 15, erau necesare 15 liniuțe, pentru 99 erau figurate 99 de liniuțe, iar pentru un milion ar fi trebuit 1 000 000 de liniuțe!

Pentru a scrie numerele într-o manieră mai funcțională, mai economicoasă, egiptenii au făcut următoarele simplificări: pentru 10 au folosit un *cârlig* , pentru 100 *spirala* , pentru 1 000 frumoasa

floare de lotus, pentru 10 000 un *deget*, pentru 100 000 un *mormoloc*, iar pentru un milion un *zeu* cu brațele ridicate.

Reproducem, mai jos, modul în care egiptenii au conceput figurarea numerelor:

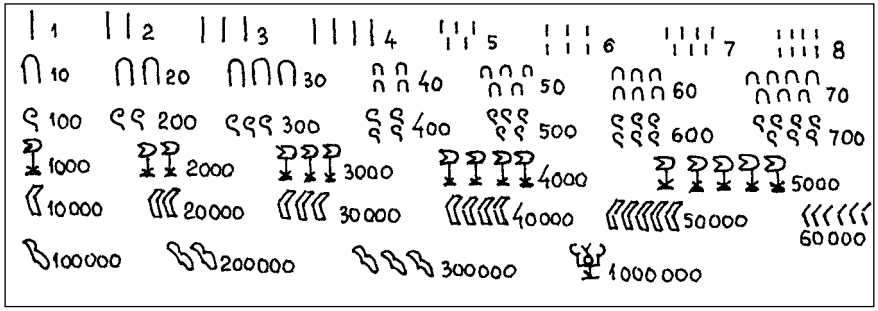


Fig. 3. *Numerația hieroglifică*

Observăm că, în scopul economisirii spațiului, zecile și unitățile erau așezate pe două linii, deci o evoluție, de la o scriere liniară s-a ajuns la una pe două registre.

Să dăm un exemplu de număr incizat pe monumente. Bunăoară, numărul 4 357 era reprezentat prin juxtapunere, în felul următor: 1 000, 1 000, 1 000, 1 000, 100, 100, 100, 10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, adică erau figurate 4 flori de lotus, 3 spirale, 5 cârlige și 7 bețișoare:

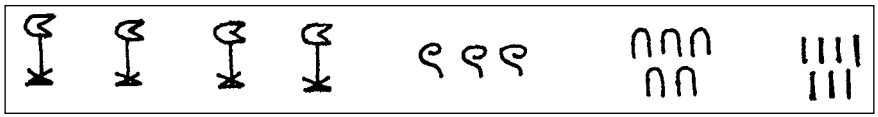


Fig. 4. *Reprezentarea numărului 4 357*

Firește că această modalitate – cum am mai spus – era destul de greoaie. Pentru numărul 99 999 erau necesare 45 de semne, cât ne trebuie nouă astăzi pentru a nota un miliard de miliarde înmulțit cu un miliard de miliarde, adică 10^{414}.

Cu vremea, egiptenii au încercat să mai simplifice figurarea numerelor. Pentru numărul 5 000 au utilizat cinci bețișoare, iar

deasupra o floare de lotus (1 000); pentru 40 000 – patru bețe, iar deasupra un deget (10 000). S-a găsit înregistrat numărul 270 000 în modul următor: 270 și deasupra un mormoloc (100 000). Pentru numărul 660 000 s-a recurs la două rânduri de câte trei mormoloci și două rânduri de câte trei degete (2 x 300 000 + 2 x 30 000).

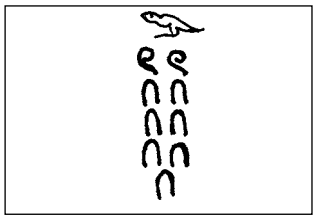


Fig. 5. *Reprezentarea numărului 270 000*

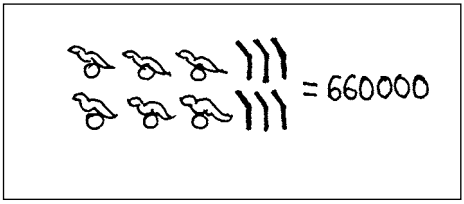


Fig. 6. *Reprezentarea numărului 660 000*

Sensul de notare a numerelor era, la egipteni, de la dreapta la stânga.

Cele mai mari numere din epigrafia (știința inscripțiilor) egipteană au fost descoperite într-un document din Hierakonpolis, oraș foarte vechi, situat pe malul stâng al Nilului, datând din mileniul al III-lea î.e.n. și se referă la bilanțul unei prăzi de război:

a. 400 000 de bovine; b. 1 422 000 de capre; c. 120 000 de prizonieri.

Deslușirea inscripției – ne referim la planul inferior al acesteia – (vezi Fig. 7, p. 70) este la îndemână, deoarece: a. boul care are dedesubtul lui 4 mormoloci (câte 2 pe un rând) înseamnă 400 000 de bovine; b. capra are la dreapta un zeu, care înseamnă un milion, și dedesubt 4 mormoloci, care reprezintă numărul 400 000, 2 degete, adică 20 000, iar dedesubtul zeului 2 nuferi, echivalând cu 2 000. Însumând semnele, se obține numărul 1 422 000 de capre; c. prizonierul legat la mâini are dedesubt un mormoloc (100 000) și 2 degete (2 x 10 000), adică 120 000 de prizonieri.

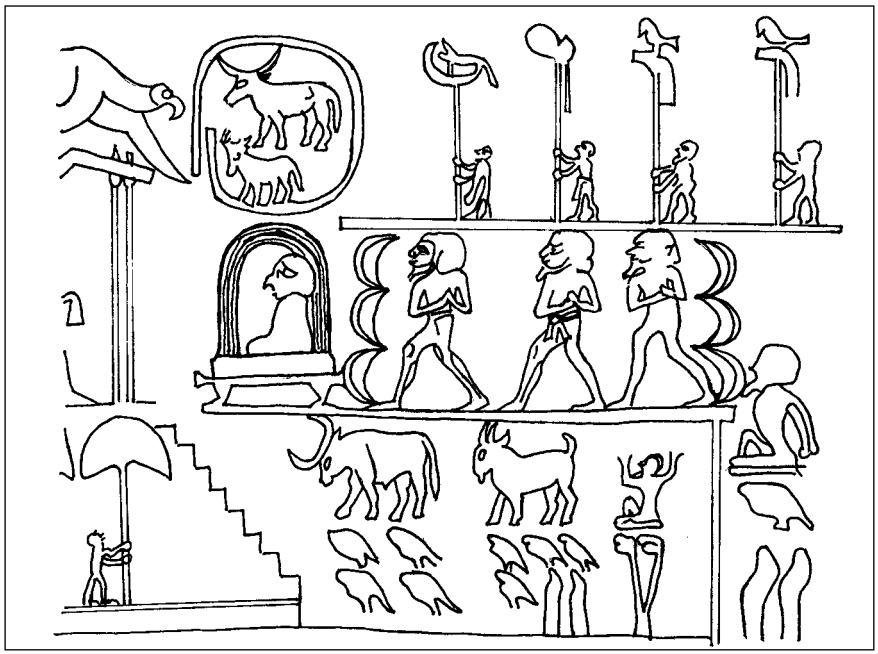


Fig. 7. *Cel mai mare număr vechi din epigrafia egipteană*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris, 1975, p. 65)

Am văzut, din exemplele de mai înainte, în ce fel au reușit egiptenii să mânuiască, doar cu ajutorul a șapte semne, numerele până la un milion, folosind scrierea hieroglifică (în greacă *hieros* = sfânt, *gliphein* = a grava).

Scrierea hieroglifică a fost modificată de egipteni atunci când au realizat avantajele unui alt suport pentru informații, în locul *pietrei*. Noul suport a fost *papirusul*, planta care crește din belșug în Delta Nilului. Din hieroglifica monumentelor, o scriere discontinuă impusă de *piatră,* a derivat scrierea cursivă, mai simplificată, numită *hieratică*. A fost inventată și folosită în Vechiul Imperiu (2278-2160 î.e.n.) La rândul ei, scrierea hieratică a cunoscut un proces de simplificare. În secolul al VIII-lea î.e.n., a apărut scrierea *demotică,*

mult mai accesibilă și, ca urmare, larg utilizată de populație, precum și în administrație.

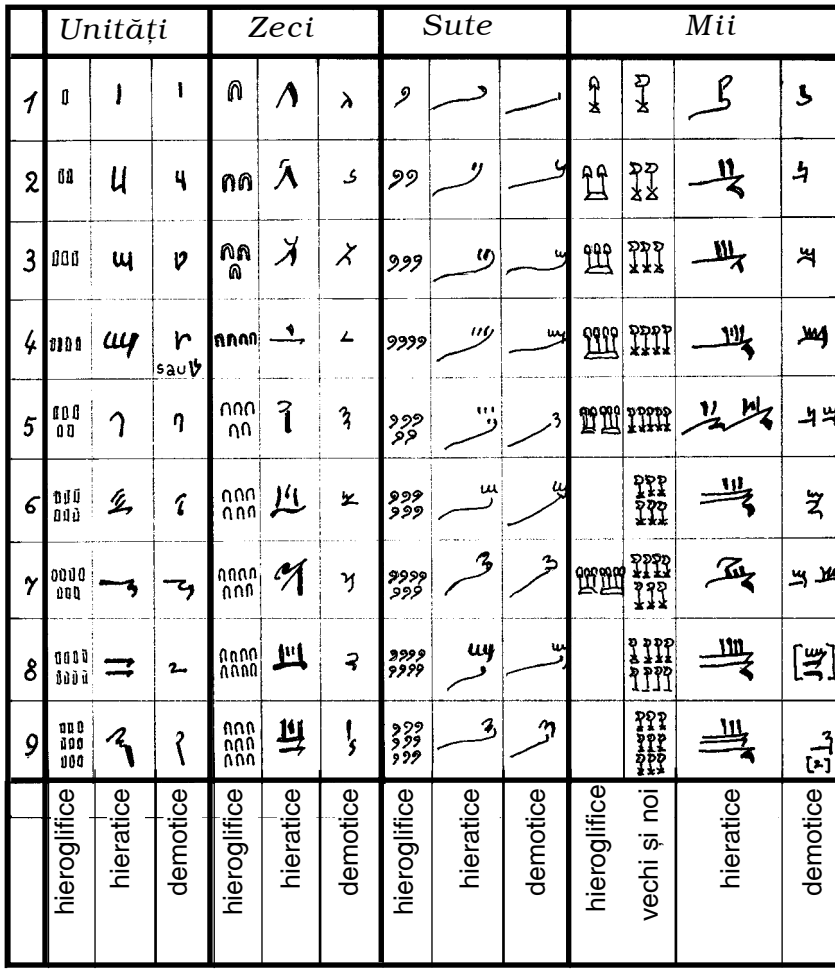


Fig. 8. *Scrierea primelor noduri la egipteni (hieroglifice, hieratice, demotice)*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 59)

În tabloul precedent, observăm că, de pildă, numerele 2, 3 și 4 din scrierea hieratică seamănă cu corespondentele lor din scrierea hieroglifică, fiind obținute prin juxtapunere, dar numerele 5, 7 și 9 erau notate cu ajutorul unor simboluri originale noi; numerele 6 și 8, deși figurate cu ajutorul unor simboluri originale, păstrează ceva din faptul că sunt pare. 60 și 90 păstrează ceva de la 3, iar 80 ceva de la 4. Iar 1 000 reprezintă stilizarea florii de lotus ș.a.m.d.

Tot în această figură se pot observa modificările survenite în cele trei tipuri de scriere pentru unități, zeci, sute și mii. Coloana I din cele patru compartimente reprezintă unitățile, cea de a II-a zecile, a III-a sutele și a IV-a miile.

Adunarea a două numere de tip hieroglific era foarte simplă: se numărau simbolurile de aceași natură și se efectuau, apoi, reducerile necesare.

Pentru *înmulțire,* egiptenii foloseau dublarea, ca și cum înmulțitorul ar fi fost scris în baza 2. Un exemplu ne poate ușura înțelegerea. Fie 7 x 11. Se scria pe verticală: 1 și 7; 2 și 7; 4 și 7; 8 și 7; 16 și 7, în felul următor:

/ 1	7
/ 2	14
4	28
/ 8	56
16	112

adică 1x7 = 7; 2 x 7= 14; 4 x 7 = 28; 8 x 7 = 56; 16 x 7 = 112.

Mai întâi, se cerceta ce numere din coloana din stânga au ca sumă înmulțitorul 11. Aceste numere sunt: 1, 2 și 8. Se rețineau, în coloana din stânga, doar aceste numere, marcându-se printr-o liniuță oblică. Apoi se cercetau corespondențele numerelor 1, 2 și 8 în coloana din dreapta – aceste numere fiind 7, 14 și 56. Prin însumarea lor, se obținea 77. Or, 77 reprezintă rezultatul înmulțirii 7x 11.

Știm că împărțirea este operația aritmetică inversă înmulțirii. Ținând seama de acest fapt, pentru a împărți, de pildă, numărul 168 la 8, egiptenii aranjau operațiile ca și cum ar fi vrut să facă o înmulțire cu 8:

– 1	8
2	16
– 4	32
8	64
–16	128

Cercetând în coloana din dreapta (invers față de înmulțire, când se cerceta coloana din stânga), numerele care, adunate, dau deîmpărțitul 168, se reținеau numerele 8, 32 și 128. În continuare, se notau numerele din coloana din stânga care corespundeau lui 8, 32 și 128 și se marcau cu o liniuță orizontală. Acestea erau 1, 4 și 16, care, adunate între ele, reprezintă câtul împărțirii.

Egiptenii operau doar cu fracția având ca numărător unitatea:

$-, -, -, -\cdots$ Excepție făcea fracția $\frac{2}{3}$.

Fracția se nota folosindu-se semnul ; care înseamnă parte (bucată).

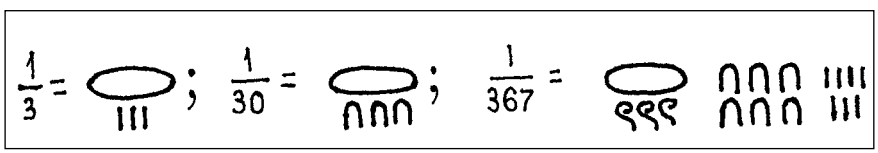


Fig. 9. *Fracții egiptene având ca numărător unitatea*

De la bobul de cacao la glifa aztecă

Zona Americii Centrale, care cuprindea imperiul aztec și popoarele maya, a cunoscut un sistem de numerație cu baza 20, în care numerele erau simbolizate cu ajutorul unor semne diferite pentru grupurile de numere 20, 20^2 și 20^3. Grație acestui sistem, au fost făcute calcule foarte precise asupra timpului. Specialiștii susțin că la precolumbieni datarea timpului începe din 12 august 3113 î.e.n.

Cel mai vechi sistem de numerație *aztec*, având baza 20, folosea patru cifre. Un mic cerculeț, corelat, probabil, cu un bob de cacao, reprezenta *unitatea*. Un drapel îl reprezenta pe 20, un conifer pe $20^2 = 400$, un sac cu tămâie pe $20^3 = 8\,000$, aceasta fiind, de altfel, puterea cea mai mare pe care o utilizau. Numărul 400, consideră cercetătorii, ar fi fost reprezentat printr-un conifer, dar, de fapt – susține G. Guitel –, era vorba de o coadă de păr. Probabil că, anterior, a avut sensul de „mult".

Pentru a nota numărul 159 999 – cel mai mare număr al aztecilor –, trebuiau juxtapuși 19 saci cu tămâie, 19 brazi, 19 drapele și 19 cerculețe. Deci era nevoie, în total, de 76 de semne! Cu vremea, au fost aduse o serie de simplificări sistemului.

Dacă un conifer, cu care notau numărul 400, pierdea _ din ramurile lui, devenea numărul 300.

Dacă același conifer pierdea − din ramuri, reprezenta numărul 200.

Iar dacă pierdea $\frac{3}{4}$ era echivalentul numărului 100.

Înregistrările de natură contabilă stau mărturie acestui sistem de notare.

Numerația aztecă a evoluat în strânsă legătură cu dezvoltarea calendarului. Luna număra 20 de zile, fixate într-o ordine imuabilă, fiecărei zile asociindu-i-se o glifă, adică un simbol gravat în piatră. Iată, reprezentate, cele 20 de zile ale calendarului aztec, corespunzând numerelor 1-20, potrivit glifelor săpate pe pietre funerare:

Nr.	Denumirea în română	Numele aztec	Glife	Denumirea în franceză	Denumirea în engleză
1	Crocodil	Cipactli		Crocodile	Weater beast the Earth
2	Vânt	Ehecatl		Vent	The Wind
3	Casă Templu	Calli		Maison	A Temple
4	Șopârlă	Quetzpalin		Lézard	Lizard
5	Șarpe	Coatl		Serpent	Snake
6	Cap de mort	Miquiztli		Tête de mort	Death
7	Cerb	Mazatl		Cerf	Deer
8	Iepure	Tochtli		Lapin	Rabbit
9	Apă	Atl		Eau	Water
10	Câine	Itzcuintli		Chien	Dog

(Continuare în pag. 76)

Fig. 10. *Cele 20 de zile ale anului religios aztec, cu glifele corespunzătoare*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 146-147)

Nr.	Denumirea în română	Numele aztec	Glife	Denumirea în franceză	Denumirea în engleză
(Continuare din pag. 75)					
11	Maimuță	Ozomatli		Singe	Monkey
12	Iarbă	Malinalli		Herbe	Grass used in penance
13	Trestie	Acatl		Roseau	Reed used for arrow shafts
14	Jaguar	Oceolotl		Jaguar	Ocelot
15	Vultur	Quauhtli		Aigle	Eagle
16	Uliu	Cozcaquauhtli		Vautour	Vulture
17	Mișcare	Olin		Mouvement	Earth tremor
18	Cuțit de piatră	Tecpatl		Couteau de pierre	Stone knife
19	Ploaie	Quiauitl		Pluie	Rain
20	Floare	Xochitl		Fleur	Flower

Fig. 10. *Cele 20 de zile ale anului religios aztec, cu glifele corespunzătoare*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 146-147)

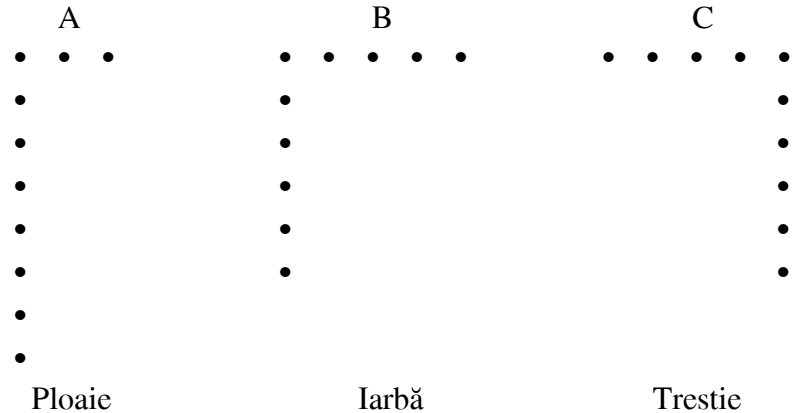
Pentru noi, care suntem obișnuiți cu cele 7 zile ale săptămânii, legate exclusiv de Soare, Pământ și planete, atâtea cât se cunoșteau în Antichitate, calendarul zilelor aztece este, într-adevăr, uluitor. Sistemul lor de numerație e strâns legat de calendarele utilizate. Or, aspectul cel mai frapant al calendarelor descoperite în Mexic și în America Centrală constă în faptul că ele operează cu două unități de timp: un *an religios,* conceput în mod artificial, și un *an solar*, legat de ciclul anotimpurilor, care reprezenta anul civil.

Plecând de la o definiție matematică, descoperită, probabil, în mod empiric, aztecii au ales pentru anul religios ciclul de 260 de zile. De ce 260? Pentru că rotirea celor 20 de zile – legate, incontestabil, de sistemul de numerație cu baza 20 – se producea după multiplicarea cu primele 13 numere întregi. De ce s-au oprit la 13? Probabil, din motive religioase. 260 este cel mai mic multiplu comun al lui 13 și 20. Dar aztecii nu aveau cunoștințe matematice și au ales în mod empiric numărul 260 ca durată a anului religios. Cu siguranță, suntem în fața unei alegeri extraastronomice.

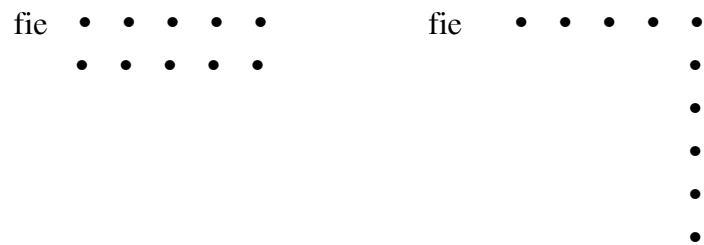
Calendarul religios al aztecilor nu prezenta nici o utilitate în viața de zi cu zi a populației, care se îndeletnicea, în principal, cu agricultura, dependentă de anotimpuri; de aceea, ei au adoptat un calendar solar civil în care anul avea 365 de zile, grupate în 18 luni a câte 20 de zile, plus 5 zile complementare.

De la azteci au rămas o serie de *Codice*, manuscrise extrem de interesante și atractive prin originalitatea și prin frumusețea reprezentărilor. În toate aceste manuscrise apar numere, într-o covârșitoare diversitate. Aceluiași număr i se asociau simboluri diferite sau același număr putea fi notat prin juxtapunerea de cerculețe în diferite poziții. Lipsa de unitate e de-a dreptul stupefiantă. Într-un codice, numărul 1, notat printr-un bob de cacao, putea reprezenta, după caz, un câine, o casă, un cuțit, o trestie sau un iepure. Nici măcar felul în care erau dispuse boabele de cacao nu asigura totdeauna unicitatea semnificației numărului. Astfel,

numărul 10 putea să însemne *ploaie* în ipostaza A, *iarbă* în ipostaza B, *trestie* în ipostaza C.



Atât *cuțit,* cât și *casă* au o reprezentare identică,



Sistemul de numerație aztec, de pură concepție primitivă, a servit la efectuarea adunărilor și la utilizarea calendarului. Valoarea lui este de palier în dezvoltarea aritmeticii elementare.

Sistemul acrofonic grecesc

Grecia a cunoscut două sisteme de numerație, foarte diferite. În primul sistem, cel mai vechi, denumit *acrofonic*, numerele erau notate cu cea dintâi literă a cuvântului care le desemna. Ținând

seama că *akros* în greacă înseamnă *vârf*, înțelegem lesne de ce sistemul a căpătat numele de acrofonic. Regula avea o singură excepție: numărul 1 era notat cu o bară. Cel de-al doilea sistem de numerație, denumit *savant,* este, realmente, un sistem alfabetic (sistemul grec savant va fi prezentat în capitolul referitor la sistemele de numerație alfabetice).

Aceste două sisteme au coexistat îndelung. Cel acrofonic, foarte rudimentar, servea la notarea numerelor cardinale. A fost utilizat în metrologie și a jucat un rol important în socotelile cu monede. La început, numerele erau notate prin transcrierea cuvântului în întregime. Cele șase cifre pe care le folosea sistemul acrofonic erau: 1, 5, 10, 100, 1 000 și 10 000.

1 I
5 Γ (forma veche a lui , inițiala lui ΠΕΝΤΕ);
10 Δ (inițiala lui DEKA);
100 H (inițiala lui HEKATON);
1000 X (inițiala lui ΧΙΩΙΟΙ);
10000 M (inițiala MΥΡΙΟΙ)

Numărul 50 era notat cu [Δ] , adică în semnul pentru cinci îl încorporau pe 10, ca și cum l-ar înmulți pe 5 cu 10. Urmând același procedeu, numărul 500 era notat cu [H] (încorporând în 5 pe 100 = 5 x 100); pentru 5 000 se utiliza semnul [M] (5 încorporându-l pe 1 000), iar 50 000 era notat cu [M] (5 încorporând simbolul pentru 10 000).

Aceste semne apar și pe Abacul din Salamida, descoperit în 1846, oarecum asemănător computerului.

Să remarcăm că grecii au construit un sistem satisfăcător pentru numărarea banilor. Să exemplificăm:

5 taleri 10 taleri 100 taleri 1000 taleri

Cum numărau strămoșii romani?

Din cele mai vechi timpuri, romanii au cunoscut un sistem de numerație asemănător sistemului acrofonic grecesc, pe care îl folosim și în zilele noastre: Cele 7 cifre ale acestui sistem sunt:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Pentru a scrie numerele mari, romanilor le-a trebuit multă ingeniozitate. Folosindu-și imaginația, ei au întreprins multiple încercări pentru a găsi soluții. În coloana din stânga a tabelului următor, observăm că pentru a scrie numărul 1 000 (10^3) au găsit patru modalități pe lângă „**M**"-ul pe care-l folosim și noi, și anume: o bară închisă între două semicercuri; un fel de semn al înmulțirii aplatizat între două semicercuri; semnul infinitului și o bară verticală surmontată de una orizontală. Pentru 10 000 (10^4) și 100 000 (10^5) existau câte trei posibilități. 10 000 era notat cu unul dintre semnele pe care romanii îl foloseau pentru 1 000, și anume **(I)**, pe care-l închideau între alte semicercuri, ceea ce însemna înzecirea numărului. El arăta astfel: **((I))**.

Cea de-a doua modalitate de reprezentare pentru 10 000 era un **X** simbolizându-l pe 10, situat înaintea lui **M**, care înseamnă 1 000, deci era o multiplicare a lui 10 cu 1 000. Ultima modalitate pentru scrierea numărului 10 000 era un 10 surmontat de o bară verticală. Pentru 100 000, romanii foloseau fie pe 1 000, notat printr-o bară verticală închisă cu trei rînduri de paranteze, adică 10 000 ori 10, fie pe **C** = 100 urmat de un **M** = 1 000 (100 x 1 000), fie pe **C** = 100 surmontat de o bară orizontală.

Milionul, adică 10^6, se nota doar în două feluri, unul fiind **X** încadrat; 10^7 era exprimat prin **C** încadrat, iar 10^8 prin **M** încadrat (10 000 000 = 1 000 x 100 000; 100 000 000 = 1 000 x 100 000); încadrarea semnifica amplificarea cu 100 000.

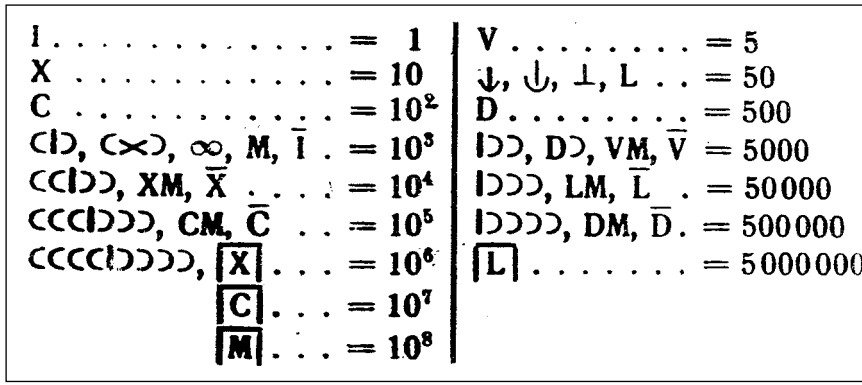


Fig. 11. *Cifre romane*
(Reprodus după: Al. Toth. *Apariția și răspândirea cifrelor în Țările Române*. București, Editura Tehnică, 1972, p. 13)

Coloana din dreapta tabelului de mai sus reproduce semnele inventate de romani pentru a reprezenta numărul 50 și numărul 500 multiplicat prin puterile lui 10. Urmărind acest tabel, este lesne de înțeles cum au fost înregistrate numerele întregi pe Abacul de buzunar păstrat la Cabinetul de Numismatică al Bibliotecii Naționale din Paris (vezi Fig. 12, p. 82).

Romanii formau destul de ușor orice număr inferior lui 500 000 000, cu numai nouă simboluri, șapte cifre, trăsătura (bara orizontală care surmonta numărul) pentru 1 000 și încadrarea (într-un dreptunghi fără bază) pentru numerele superioare lui 100 000. Iată, de exemplu, cum alcătuiau numărul: 123 456 789:

sute de mii	mii	sute, zeci, unități
1234	56	789
	LVI	DCCLXXXVIIII
MCCXXXIV		

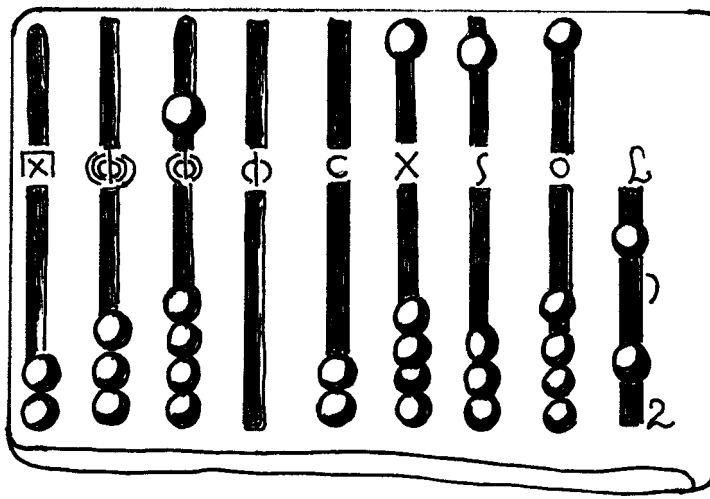


Fig. 12. *Abacul de buzunar*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 210)

Este interesant de urmărit cum pronunțau romanii numerele mari. Pentru puterile succesive ale numărului 10, ei spuneau:

10 = decem
10^2 = centum
10^3 = mille
10^4 = decem milia (10 x 1000)
10^5 = centum milia (100 x 1000)
10^6 = decies centena milia (10 x 100 x 1000)
10^7 = centies centena milia (100 x 100 x 1000)
10^8 = milies centena milia (1000 x 100 x 1000)
10^9 = decies milies centena milia (10 x 1000 x 100 x 1000).

Observăm aici două praguri, unul pentru 1 000 și altul pentru 100 000.

Să nu uităm că atestarea numerelor mari a fost târzie în toată lumea. În Franța, vocabula *milion* apare în anul 1359, importată din Italia, unde *millione* însemna o mie mare, iar *miliard* e atestat în

1544. Cuvântul milion a fost inventat de Marco Polo (1254-1324), care, entuziasmat de mulțimea oamenilor și a bogățiilor pe care le-a văzut în China, l-a folosit ca superlativ al cuvântului *mille* (*o mie,* în italiană).

În Apusul Europei, la începutul Evului Mediu, a dominat numărătoarea cu cifre romane, cu fracții romane, precum și cu abacul, pe lângă numărarea pe degete și folosirea răbojului. În bibliotecile din țara noastră, se păstrează manuscrise și cărți vechi în care apar numere romane. Cel mai vechi datează din secolul al XI-lea și aparține fondului Bibliotecii Batthyaneum din Alba Iulia.

Deși numerația greacă acrofonică și numerația romană prezintă aceeași concepție, este puțin probabil că una să o fi influențat pe alta și cu atât mai puțin că ar avea o origine comună. Tot astfel, cine și-ar putea imagina, bunăoară, că sistemul de numerație aztec a fost influențat de sistemul de numerație egiptean? Fiecare dintre aceste două popoare a avut aceeași idee!

Situația este, însă, complet alta în cazul sistemelor de numerație pur alfabetice, așa cum se va vedea în continuare.

NUMERAȚIILE ALFABETICE – UN IMENS PAS ÎN ISTORIE

Maria, Valeria și Sandra trebuie să redacteze un studiu despre sistemele de numerație alfabetică. Ele și-au împărțit atribuțiile. Maria aduce informații despre matematica la evrei, Valeria despre matematica la greci, iar Sandra despre matematica la arabi. După o lună, fetele se întâlnesc la Sandra acasă, ca să discute rezultatele investigației lor.

Sandra: Să începem așa: numerația ebraică, numerația greacă savantă și primul sistem de numerație arabă își datorează apariția alfabetului. Din alfabetul protosinaitic, consonantic, în care au fost scrise cărțile lui Moise, a rezultat cea mai veche numerație alfabetică din istorie. Alfabetul fenician, la rândul lui consonatic, a jucat un rol asemănător. După cum se știe, scrierea feniciană număra 22 de consoane. Grecii le-au preluat și au adăugat vocalele, desăvârșind procesul de creare a scrierii alfabetice propriu-zise și intrând în istorie ca autorii de fapt ai alfabetului. A fost o revoluție a culturii europene. Inițial, grecii au asociat celor 24 de litere (consoane și vocale) ale alfabetului lor 24 de numere cardinale.

Valeria: Trebuie adăugat că în timp ce alfabetul ebraic are 22 de consoane, cel grec numără 24 de consoane și vocale, iar cel arab 28 de consoane. Toate aceste trei sisteme de numerație îl au ca bază pe 10.

Sandra: Acum e rândul Mariei să citească ce a redactat.

O asociere ingenioasă a literelor și numerelor la evrei

Maria: Reprezentarea numerelor la evrei a fost extrem de ingenioasă. Ei au început prin a asocia primele 9 numere întregi primelor 9 litere ale alfabetului lor. O caracteristică remarcabilă a limbii ebraice i-a făcut să realizeze următoarea asociere: numele zecilor de la 30 la 90 sunt pluralele numelor atribuite lui 3, 4, 5… 9. Numărul 20 nu este însă asociat, în același chip ca celelalte noduri ale zecilor, cu numărul întreg 2.

Având la dispoziție încă patru litere, acestea au fost atribuite primelor 4 sute. Numărul 500 a fost reprezentat prin 400 + 100; 600 prin 400 + 200 ș.a.m.d. până la 900 = 400 + 400 + 100.

Apoi, evreii au renunțat la acest sistem, și pentru 500, 600, 700, 800 și 900 au asociat litere care nu figurau în alfabetul lor uzual, deoarece acestea nu serveau decât ca terminale. Ei au folosit pentru 500 pe *kaf* final, pentru 600 pe *mem* final, pentru 700 pe *nun* final, pentru 800 *pé* final, iar pentru 900 pe *șade* final. Pentru a ajunge la un milion, ei au avut ideea de a pune deasupra fiecărui număr două puncte, mărindu-le în acest fel valoarea cu o mie.

Scrierea numerelor la evrei era de la dreapta la stânga, începând cu unitățile de ordinul cel mai mare. Bunăoară, 1 005 se nota *alef hé;* nu exista ambiguitate la citirea numărului (alef nu putea fi decât 1 sau 1 000; plasat înaintea lui *hé* era 1 000). Numărul versetelor lui Massorah îl găsim scris ca un număr modern, dintr-o numerație de poziție. Massorah înseamnă tradiție și reprezintă pe acei cărturari evrei care, pentru a asigura acuratețea textului biblic, au marcat vocalele cu puncte. Textul biblic stabilit de ei numără 5 845 de

Corespon-dentul numeric	Denumirea literelor ebraice		Sim-bolul ebraic	Litere termi-nale	Corespon-dentul numeric	Sim-bolul vechi		Sim-bolul nou
1	ʾ	ʾalef	א					
2	b	bet	ב					
3	g	gimel	ג					
4	d	dalet	ד					
5	h	hé	ה					
6	w	waw	ו					
7	z	zaïn	ז					
8	ḥ	ḥet	ח					
9	ṭ	ṭet	ט					
10	y	yod	י					
20	k	kaf	כ	ך				
30	l	lamed	ל					
40	m	mem	מ	ם				
50	n	nun	נ	ן				
60	s	samek	ס					
70	ʿ	ʿaïn	ע					
80	p	pé	פ	ף				
90	ṣ	ṣadé	צ	ץ	500	ת ק	ϡου	ך
100	ḳ	ḳof	ק		600	ת ר	ϡου	ם
200	r	reš	ר		700	ת ש	ϡου	ן
300	š	šin	ש		800	ת ת	ϡου	ף
400	t	taw	ת		900	ת ת ק	ϡου	ץ

Fig 13. Literele ebraice și corespondentul lor numeric

(Reprodus după: Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations,* vol. I, London, The Open Court Publishing Company, 1928, p. 20-21)

versete. Cunoscând corespondențele dintre 5, 8, 4, 5 și litere, putem nota acest număr în scrierea de poziție de la dreapta la stânga, adică: *hé het dalet hé = 5, 8, 4, 5.*

Valeria: Dați-mi voie să adaug că, în Vechiul Israel, au conviețuit atât sistemul de numerație zecimal, cât și cel sexagesimal. Primul dintre acestea era legat de socotitul cu ajutorul celor zece degete ale mâinilor, iar cel de-al doilea a fost împrumutat de la babilonieni. Urme ale utilizării sistemului sexagesimal se pot constata în *Biblie*, în reglementarea greutăților sau în uzul monedelor. Să ne amintim că numărul 12 apare frecvent în literatura biblică – cele 12 semiții ale lui Israel, cele 12 porți ale Ierusalimului etc.

Sandra: E rândul tău, Valeria.

Impactul numerației grecești

Valeria: Grecii au început prin a simboliza primele 24 de numere apelând la cele 24 de litere ale alfabetului lor. Ținând seama că aceste 24 de litere nu erau suficiente pentru a nota cele nouă unități simple, cele nouă zeci și cele nouă sute, ei au introdus trei semne suplimentare, și anume: *digamma* (a șasea literă a alfabetului fenician, pentru 6), *koppa* (de origine semitică pentru 90) și *sampi* (de origine feniciană, pentru 900). În aceste condiții, puteau acoperi toate numerele până la 1 000, așa cum vi le înfățișez în următorul tabel.

Primele opt litere ale alfabetului grec și *digamma* corespund numerelor 1-9; următoarele opt litere și *koppa* indică zecile (10-90); ultimele opt litere și *sampi* indică sutele (100-900). Miile (1 000-9 000) erau simbolizate cu ajutorul literelor care indicau unitățile,

dar precedate de o liniuță, situată ceva mai jos decât litera.

Sandra: Știu că, spre deosebire de evrei, grecii notau în sistem pozițional de la stânga la dreapta.

Valeria: Corect. De exemplu, numărul 4 837 îl notau astfel: litera *delta* pentru 4, precedată de o liniuță verticală (care indica faptul că e vorba de mii), urmată de litera *omega,* care indica valoarea 800, pentru valoarea 30 puneau litera *lambda* și, în sfârșit, litera *dzeta* pentru valoarea 7.

Maria: Reiese că pentru a nota numerele până la miriadă (10 000), numerația greacă a folosit aceleași procedee ca și numerația ebraică. Atunci cum se explică impactul ei incomparabil mai mare decât al numerației ebraice?

Valeria: Impactul numerației grecești se datorează atât condițiilor geografice și istorice, cât și calităților ei intrinsece.

Unitatea imediat următoare miilor, miriada (10 000), era notată de greci în mai multe feluri. Se scria, de exemplu,

1	α	alpha
2	β	bèta
3	γ	gamma
4	δ	delta
5	ε	epsilon
6	ϝ	[digamma]
7	ζ	zèta
8	η	èta
9	θ	thèta
10	ι	iota
20	κ	kappa
30	λ	lambda
40	μ	mu
50	ν	nu
60	ξ	xi
70	ο	o micron
80	π	pi
90	ϙ	[koppa]
100	ρ	rho
200	σ	sigma
300	τ	tau
400	υ	upsilon
500	φ	phi
600	χ	khi
700	ψ	psi
800	ω	oméga
900	ϡ	[sadé]

Fig. 14. *Denumirea numerelor la greci pe baza alfabetului* (transcriere internațională)
Tabelul este completat de către autoare cu termenii semitici, menționați în paranteze drepte.

litera M și se punea în fața sau deasupra ei cifra care indica de câte ori trebuie luată miriada. De exemplu: 314 159 reprezenta 31 de miriade și 4 159, deci se punea un *M* pentru miriadă și deasupra sau în fața ei *lambda* pentru 30 și *alfa* pentru 1; în continuare, pentru 4 000 se punea *delta* (patru) precedată de o liniuță, *ro* pentru 100; *niu* pentru 50 și, în sfârșit, *theta* pentru 9. Numărul 314 159 în scrierea grecilor, arăta astfel: $\lambda\alpha M^{\iota}\delta\rho\nu\theta$. Marele matematician grec Diofant (325-409) nu-l folosea pe M, ci despărțea miriadele cu un punct de unitățile de rang inferior. În manuscrisele din epocile târzii ale civilizației grecești antice, miriada era reprezentată prin două puncte puse deasupra cifrelor.

Maria: Și pentru notarea numerelor mari cum se proceda? Pentru notarea numerelor mari, matematicienii greci au apelat la baze foarte mari. Astfel, astronomul și matematicianul Apollonios din Perga (262-180 î.e.n.) a folosit baza 10^4. Acest sistem de numerație prezintă valoare speculativă, dar era total lipsit de utilitate practică, nefiind răspândit în rândurile matematicienilor. Imaginația lui Arhimede a depășit-o pe aceea a lui Apollonios. El a considerat miriada miriadei o nouă unitate, ceea ce i-a permis să ajungă la numere chiar superioare numărului firelor de nisip pe care le-ar conține o sferă având raza egală cu distanța de la Pământ la Soare. Arhimede credea că diametrul acestei sfere este inferior miriadei de miriade. El a ajuns la un număr format din unitate și opt sute de milioane de zerouri. Sistemul de numerație grec a reușit să se adapteze ușor la notația sexagesimală a babilonienilor, sporindu-i eficiența. Marii matematicieni greci au perfecționat acest instrument puțin cam greoi și l-au făcut apt pentru calcule foarte mari.

Multe popoare care au resimțit influența greacă au creat pentru uzul lor sisteme de numerație alfabetice inspirate din sistemul de numerație savant al grecilor.

Maria: Acum, Sandra.

Numerația arabă privește spre Europa

Sandra: Vă mărturisesc că n-am reușit să redactez un text prea coerent, am întâmpinat multe greutăți, deoarece mă descurc greu cu alfabetul arab. Totuși, vă rog să mă ascultați (citește): Toate sistemele de numerație care se bazează pe alfabet respectă regula potrivit căreia orice literă a alfabetului corespunde unui număr și numai unuia singur și orice număr corespunde unei litere și numai unei singure litere. Arabii, care dispuneau de un alfabet alcătuit din 28 de consoane, aveau posibilitatea să noteze cu litere și toate nodurile sutelor, ceea ce le-a permis să reprezinte cu ușurință numere până la 1 000. *Zece* fiind baza sistemului de numerație, *nouă* se constituie în număr fundamental, deoarece există câte nouă noduri pentru unități, zeci și sute. Corespondența dintre literele alfabetului ebraic, respectiv ale celui grecesc, și numere este ordonată și biunivocă. Surprinzător pentru noi, obișnuiți cu acest tip de corespondență, în limba arabă corespondența biunivocă dintre literele alfabetului și numere nu mai urmează șirul crescător al numerelor. Șirului crescător de 28 de litere ale alfabetului arab îi corespunde șirul numerelor 1, 2, 400, 500, 3, 8, 600, 4, 700, 200, 7, 60, 300, 90, 800, 9, 900, 70, 1000, 80, 100, 20, 30, 40, 50, 5, 6, 10.

Maria: Ce dovedesc aceste observații? Ai tras vreo concluzie? Hai să vedem ce ne mai spune Valeria.

Valeria: Cea mai bună concluzie e să vă prezint tabelul numerelor de la 1 la 1 000 000 folosite de arabi:

1 ا	10 ي	100 ق	1000 غ	10000 يغ	100000 قغ
2 ب	20 ك	200 ر	2000 بغ	20000 كغ	200000 رغ
3 ج	30 ل	300 ش	3000 جغ	30000 لغ	300000 شغ
4 د	40 م	400 ت	4000 دغ	40000 مغ	400000 تغ
5 ه	50 ن	500 ث	5000 هغ	50000 نغ	500000 ثغ
6 و	60 س	600 خ	6000 وغ	60000 سغ	600000 خغ
7 ز	70 ع	700 ذ	7000 زغ	70000 عغ	700000 ذغ
8 ح	80 ف	800 ض	8000 حغ	80000 فغ	800000 ضغ
9 ط	90 ص	900 ظ	9000 طغ	90000 صغ	900000 ظغ
1000000 غغ					

Fig.15. *Nodurile de la 1 la 1 000 000 în numerația alfabetică arabă*
(Reprodus după: Florian Cajori, *Op.cit.*, p. 29)

Maria: Vrei să ne zăpăcești de tot?

Valeria: Doamne ferește! Mă uit la tabelul acesta. Cum să descifrăm numerele mai mari de 4 000?

Sandra: Mai întâi, să nu scăpăm din vedere că arabii scriau numerele de la dreapta la stânga, iar noi le scriem de la stânga la dreapta. Pentru 3 000, noi notăm 3, apoi punem mia, iar arabii puneau *mie trei*, dar semnul pentru 3 000 nu corespunde cu semnul pentru 1 000 și cu semnul pentru 3.

Maria: Stai! Descopăr că metoda ține pentru 4 000, 6 000 și 7 000.

Valeria: Maria are dreptate, celelalte noduri ale miilor nu conțin numărul 1 000, dar, în poziție terminală, toate prezintă același semn.

Maria: Există vreo justificare pentru această constatare?

Sandra: În araba cursivă, aceeași literă poate lua forma: mediană, inițială, finală, izolată.

Valeria: Dar literele alfabetului nu sunt izolate?

Sandra: Literele alfabetului permit să se scrie nodurile unităților, zecilor, sutelor și numărul 1 000. Dar, atenție, când scriem 3 000, numărul *mie* se găsește în poziție terminală, deci trebuie folosită forma finală, pe când pentru 3 folosim forma inițială a literei corespunzătoare.

Valeria: Cam complicat!

Sandra: Dar 4 000, 6 000 și 7 000 se prezintă prin simpla juxtapunere, deoarece 4, 6, 7 nu se leagă cu *mia*, astfel că *mia* păstrează aparența de literă izolată.

Valeria: Și semnul pentru milion?

Sandra: Reprezentarea milionului se obține prin juxtapunerea a două semne pentru *mie*; cel din dreapta este semnul inițial pentru *mie*, foarte mic, înghesuit, cu un punct diacritic, iar cel din stânga este semnul final pentru *mie*, care comportă și el un punct diacritic.

Maria: Cred că ți-a fost foarte greu să pricepi acest sistem de numerație.

Valeria: Și foarte greu să-l expui succint.

Sandra: Orice număr scris în acest prim sistem de numerație arab trebuia să fie considerat ca un cuvânt, iar reprezentarea lui să respecte regulile scrierii cursive arabe.

Valeria: Ce consecințe au avut dificultățile cu care s-a confruntat acest sistem de numerație arab?

Sandra: Toate aceste dificultăți au surghiunit primul sistem de numerație arab într-o întrebuințare statică. Ca urmare, specialiștii în gramatica arabă au inventat nume mnemotehnice pentru a facilita reținerea succesiunii nodurilor unităților, zecilor, sutelor. Toate complicațiile care decurg din scrierea cursivă arabă i-au determinat

să adopte sistemul sexagesimal de poziție babilonian, care a permis efectuarea eficientă de calcule.

Valeria: Cam când s-a întâmplat asta?

Sandra: Pe la începutul secolului al IX-lea. Savanții din Bagdad au adoptat atunci sistemul de numerație zecimal de poziție, care fusese introdus nu cu mult înainte în India și care reprezenta perfecționarea aritmeticii zecimale bazate pe principiul valorii simbolului. Covârșitorul merit al arabilor este acela de a fi răspândit numerația pozițională indiană, pe care o cunoșteau încă din secolul al VIII-lea. De însemnătate hotărâtoare pentru cunoașterea și adoptarea cifrelor indiene și a scrierii poziționale în Europa a fost apariția, începând din secolul al XII-lea, a traducerilor în limba latină a cărților arabe de aritmetică și, îndeosebi, a manualului de aritmetică al matematicianului arab Muhammad ibn Musa al Horezmi (c. 780-850). Impactul acestei lucrări, care debutează cu descrierea detaliată a sistemului indian de numerație, este covârșitor. El utilizează nouă „figuri" – simbolurile numerelor 1, 2, 3, …, 9 – și un „cerc mic" – simbolul lui zero, cu care erau exprimate, fără dificultate, numere oricât de mari.

Valeria: Totuși, se foloseau, în continuare, și vechile procedee de numerație.

Maria: Am citit că cel care a introdus cifrele arabe pe continentul nostru a fost Fibonacci.

Sandra: Exact, și o dată cu introducerea lui în viața economică, noul sistem de numerație câștigă definitiv teren în Europa secolului al XV-lea. Este elocvent că, pe monede, cifrele arabe au apărut încă în secolul al XV-lea (1424, în Elveția), iar pe monumentele funerare în secolul al XIV-lea (la Pforzheim, lângă Buda, în 1371).

NUMERAȚIILE DE POZIȚIE

Începutul a fost în Sumer

Incontestabil că cel mai vechi sistem de numerație care a reușit să devină realmente un sistem de poziție a fost cel al sumerienilor și babilonienilor. Oamenii de știință au descoperit documente relative la acest sistem încă din mileniul al III-lea î.e.n. *Zero* nu a apărut în cadrul sistemului decât târziu, și anume în poziție mediană (pentru a semnala lipsa unei cifre din interiorul unui număr), iar zero operațional nu a figurat niciodată. Inițiatorii au fost sumerienii, de la care l-au preluat babilonienii.

Baza sistemului de numerație sumerian-babilonian a fost 60. Ne punem întrebarea de ce sumerienii și babilonienii au ales o bază mare de numerație. Istoricii și matematicienii au emis mai multe ipoteze. Prima lua în considerare virtutea numărului 60 de a avea mulți divizori, ceea ce permite mânuirea lui comodă. Cel care a emis această ipoteză a fost matematicianul și astronomul grec Theon din Alexandria (sfârșitul secolului al IV-lea e.n.) – comentatorul lui Ptolemeu.

În epoca modernă, matematicianul englez John Wallis (1616-1703) s-a oprit și el la acest argument. Alții au legat folosirea lui 60 de calendar, de anul rotunjit sau de cerc. La începutul secolului al XX-lea, astrologul german Kewitsch a sugerat ipoteza puțin fantezistă că 60 a fost ales ca rezultantă a contopirii concepției a două popoare mai vechi, din care unul ar fi adus sistemul zecimal, iar celălalt un sistem de numărare bazat pe numărul 6. Matematiciana franceză Geneviève Guitel a căutat să argumenteze că alegerea lui 60 ca rezultantă a încrucișării lui 6 cu 10 e rațională, fiindcă se leagă de

3 și de 2, respectiv de 5, ca divizori ai bazei. Numărul 3 nu joacă în metrologie un rol tot atât de important ca 2, dar are un rol esențial în muzică, stând la baza obținerii de cvinte de o mare frumusețe.

Deși majoritatea popoarelor au adoptat numărul 10 ca bază a numerației, urmele folosirii bazei 60 se regăsesc și astăzi pretutindeni în lume! Nu socotim timpul folosind ca bază numărul 60? Ora are 60 de minute și minutul 60 de secunde. Dacă în Ajunul Crăciunului, la ora 18, 10 minute și 2 secunde, copilul își întreabă tatăl cât mai e până vine Moșul cu daruri, tatăl va trebui să facă următoarea socoteală: $24^h - 18^h10'2'' = (23^h + 1^h) - 18^h10'2'' = (23^h60') - 18^h10'2'' = [23^h(59' + 1')] - 18^h10'2'' = (23^h59'60'') - 18^h10'2'' = 5^h49'58''$. În același mod procedează și școlarii când fac operații de adunare, scădere, înmulțire sau împărțire a unghiurilor etc.

Principiul juxtapunerii a stat la baza tuturor celorlalte sisteme de numerație din Antichitate și pe care l-am moștenit și noi, folosind scrierea cu caractere latine. În sistemul pozițional, valoarea unui simbol numeric depinde de poziția relativă a acestuia în secvența numărului respectiv. Această notație pozițională prezintă imensul avantaj că simplifică operațiile fundamentale, făcându-le mecanice, că permite, de asemenea, ca numere foarte mari, ca și numere foarte mici să se exprime la fel de ușor.

Un exemplu ar fi potrivit pentru a ne edifica asupra caracterului unui sistem pozițional. Să vedem ce reprezintă într-un asemenea sistem cifra 7 din numărul 7 777: cifra 7 desemnează cele 7 unități de ordinul sau rangul întâi (care ocupă prima secvență din număr); apoi cele 70 de unități de rangul al doilea; cele 700 de unități de rangul al treilea și, în fine, cele 7 000 de unități de rangul al patrulea.

Elevii lucrează cu numere într-un sistem pozițional cu baza 10. Ei știu, de exemplu, ce înseamnă numărul 382:

$382 = (3 \times 100) + (8 \times 10) + 2$ sau $(3 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$ (Toată lumea cunoaște că orice număr ridicat la puterea zero este egal cu 1). Numărul 382 ne spune, deci, că avem 3 unități de rangul al treilea, 8 unități de rangul al doilea și 2 unități de rangul 1. Prin

urmare, valoarea unităților de rangul 1 nu este afectată de bază, valoarea unităților de rangul al doilea se înmulțește cu valoarea bazei 10, valoarea unităților de rangul al treilea se înmulțește cu valoarea bazei ridicate la puterea a doua. Urmând acest principiu, realizăm ușor că valoarea unităților de rang n se va înmulți cu valoarea bazei la puterea *n – 1*.

Deoarece obiectul prezentului comentariu este legat de sistemul pozițional de numerație sumeriană, având ca bază 60, să încercăm să urmărim cum notau numerele sumerienii și babilonienii. Prin analogie, valoarea unităților de rangul întâi rămâne neschimbată, valoarea unităților de rangul al doilea se înmulțește cu 60, iar valoarea unităților de rangul al treilea se înmulțește cu 60^2 ș.a.m.d. Să alegem la întâmplare un număr. Fie acesta 7 523. Aplicând cele de mai sus, avem $(7 \times 60^3) + (5 \times 60^2) + (2 \times 60^1) + (3 \times 60^0)$. Efectuăm înmulțirea. Numărul este egal cu 1 540 123.

Și acum să ne oprim puțin asupra numerației orale a locuitorilor dintre Tigru și Eufrat. O facem pentru că aceasta constituie o mărturie a arhitecturii numerației lor scrise. Terminologia orală ne arată că articulațiile numerației scrise sunt încorporate în limbaj. Numele primelor zece numere și ale primelor noduri ale zecilor păstrează urme ale bazelor de numerație folosite anterior, adică 5 și 10. De altfel, așa se întâmplă în cea mai mare parte a numerațiilor, dar, în general, denumirile primelor numere sunt atât de vechi și atât de deformate încât o întoarcere la originile limbajului este, adesea, imposibilă. Tabloul acestui sistem se prezintă astfel:

1 *geš* (*geš* este același cuvânt pentru „mascul, bărbat“)
2 *min* (*min* este același cuvânt pentru „femeie“)
3 *eš* (*eš* are sensul de pluralitate, este sufixul pluralului)
4 *limmu*
5 *ia*
6 *aš*
7 *imin* (*imin* este un nume compus din i[a]+ min deci 5 + 2)
8 *issu*
9 *ilimmu* (*ilimmu* este un nume compus din i[a]+ limmu = 5 + 4)

După cum se poate observa, numerele 7 și 9 sunt marcate de 5 (7 = 5 + 2, iar 9 = 5 + 4).

Să continuăm prezentarea tabloului:

10 *u*
20 *niš*
30 *ušu* (uš, în loc de eš, + u, adică 3 x 10)
40 *ninim* sau *nin* (ninim este contracția lui niš + min = 20 x 2)
50 *ninnû* sau *nin'+ u* (adică 40 + 10)
60 *geš* sau *gešta*

Începând cu al doilea prag al sistemului de numerație cu 60, numerația vorbită este deosebit de coerentă:

60 *geš*
120 *geš + min* (60 x 2)
180 *geš + eš* (60 x 3)

600 era tratat ca o nouă unitate, deși compus din 60 x 10, și era denumit *geš-u*; el reprezintă al treilea prag al notației.

În același spirit, plecând de la:

600 *geš + u*
1 200 *geš + u + min* (600 x 2)
1 800 *geš + u + eš* (600 x 3)

3 600 era denumit *šar*, care înseamnă *cerc*, *ansamblu, totalitate* și reprezenta cel de-al patrulea palier al numerotației. Folosind aceeași tehnică avem:

7 200 *šar + min* (3600 x 2)
36 000 *šar + u* (3 600 x 10).

Și tot așa până la al cincilea prag:

216 000 = 60^3 = *šar + gal,* adică *marele šar*.

În ceea ce privește numerația scrisă a sumerienilor, ea a fost marcată de instrumentele de scris. Cel dintâi instrument pentru notarea numerelor a fost tulpina de trestie, secționată circular, care, apăsată

perpendicular pe tăbliţa de lut, contura o formă foarte apropiată de cerc, iar prin apăsarea oblică se obţinea forma de semicerc. Cu 2000 de ani î.e.n., folosind tehnica realizării de semicercuri pe tăbliţele de argilă şi aliniind simbolurile pe una sau pe două linii, sumerienii au notat numerele de la 1 la 9, aşa cum se vede în tabelul următor:

1	D			un semicerc
2	DD			două semicercuri aşezate la rând
3	DDD (a)	DD D (b)	D D D (c)	(a) trei semicercuri la rând (b) două semicercuri aşezate liniar şi al treilea sub primul (c) două semicercuri pe verticală şi un al treilea între ele
4	DDDD (a)	DD DD (b)		(a) patru semicercuri în linie dreaptă (b) câte două semicercuri aşezate pe două rânduri
5	DDDDD (a)	DDD DD (b)		(a) cinci semicercuri în linie dreaptă (b) pe două rânduri, pe rândul întâi trei semicercuri, pe rândul al doilea două semicercuri
6	DDDDDD (a)	DDD DDD (b)		(a) şase semicercuri în linie dreaptă (b) pe două rânduri câte trei semicercuri
7	DDDD DDD			pe rândul întâi patru semicercuri, pe cel de-al doilea trei
8	DDDD DDDD			câte patru semicercuri pe două rânduri
9	DDDDD DDDD			pe rândul întâi cinci semicercuri, pe rândul al doilea patru semicercuri

Fig. 16. Notaţia sumeriană a numerelor 1-9

Pentru numărul zece, sumerienii au reprodus pe tăblița de lut forma cercului.

Cu ajutorul a două tulpini de trestie de mărimi diferite, secționate circular, se puteau obține patru numere:

1 = D (un semicerc mic)

10 = ○ (un cerc mic)

60 = D (un semicerc mare)

60^2 = 3600 = ◯ (un cerc mare)

Prin combinare, se obținea, de exemplu:

600 = D○ (în interiorul simbolului lui 60 se introducea simbolul pentru 10, care avea rol de operator, înmulțind pe 60 cu 10).

36 000 = ◎ (în interiorul simbolului lui 3 600, un cerc mare, se introducea simbolul lui 10, adică un cerc mic, și se obținea 3600 x 10 = 36 000).

Folosind pe 1, 10, 60, 600, 3 600 și 36 000, puteau fi scrise toate numere inferioare lui 216 000 (adică 60^3).

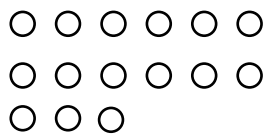
Cu ajutorul acestor simboluri, locuitorii Mesopotamiei făceau ușor calcule. Să dăm un exemplu de înmulțire: 50 x 3. Vom nota de cinci ori semnul lui 10 și de trei ori semnul lui unu:

○○○○○ x DDD

Știm că înmulțirea este o adunare repetată. A înmulți pe 50 cu 3 înseamnă a aduna pe 50 cu 50 și cu 50. Vom nota, deci, trei rânduri a câte cinci cerculețe:

○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

Ținând seama că lucrăm în baza 60, trebuie să avem grupuri de câte șase cerculețe. În acest scop, luăm două cerculețe din ultimul rând și mutăm câte un cerculeț la primul și la al doilea rând. Obținem în acest fel două rânduri de câte șase cerculețe și un al treilea rând de trei cerculețe, adică doi de 60 și 30.


sau DDOOO

Exemplul de mai sus se referă la o înmulțire comodă, dar locuitorii Mesopotamiei trebuiau să facă și înmulțiri mai complicate. Ca și noi, în secolul al XXI-lea, ei foloseau tabla înmulțirii. Babilonienii, ca și sumerienii, aveau la dispoziție, pe plăcuțe de argilă table de înmulțire pentru numerele lor.

Pentru a împărți, sumerienii asociau împărțirea cu înmulțirea, procedând astfel: dacă aveau de împărțit un număr cu 2, atunci îl înmulțeau mai întâi cu 30; ținând seama că 2 x 30 = 60, le rămânea să împartă numărul la 60 (baza lor de numerație), iar dacă trebuiau să împartă numărul la 3, îl înmulțeau mai întâi cu 20 ș.a.m.d.

Înlocuirea tulpinii de trestie secționate circular cu un calam obișnuit a determinat un alt mod de desenare a numerelor, înainte ca sistemul de numerație să devină pozițional. Astfel, 1 notat printr-un soi de semicerc devine un triunghi, care, apoi, se subțiază și își schimbă poziția din orizontală în verticală. Numărul 10 ia forma ⟨, iar 60 este metamorfozat în același „cui“ ca 1. Suntem în prezența a ceea ce e cunoscut drept scrierea cuneiformă.

Către anul 2000 î.e.n., numerele de la 1 la 9 se prezentau în noua scriere ca în figura de mai jos. În afară de numărul 3, ne găsim în fața unei grupări diadice, care favorizează economia de spațiu; totul este axat pe par și impar.

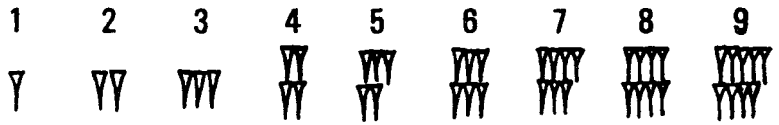


Fig. 17. *Numerele 1-9 în prima scriere cuneiformă*

După cum observăm, 2 și 3 sunt obținute prin alăturarea (adunarea) lineară a cuielor. Pentru economie de spațiu, numerele

de la 4 la 9 sunt notate pe două rânduri: 4 = 2 + 2; 5 = 3 + 2; 6 = 3 + 3; 7 = 4 + 3; 8 = 4 + 4; 9 = 5 + 4.

În tabelul de mai jos, observăm preponderența grupării a câte trei cuie. E prima victorie a lui 3, primul președinte din Țara Numerelor Arinei!

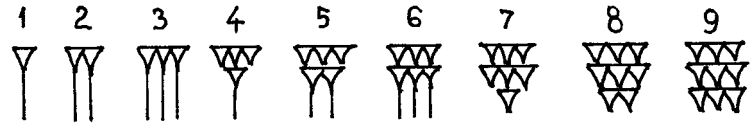


Fig. 18. *Numerele 1-9 în cea de a doua scriere cuneiformă*

Tabelul următor prezintă folosirea semnului special pentru 10, cu ajutorul căruia sumerienii și babilonienii scriau pe 11 (10 + 1); 12 (10 + 2); 20 (10 + 10); pentru 60 apare un semn nou, 70 = (60 + 10) ș.a.m.d.

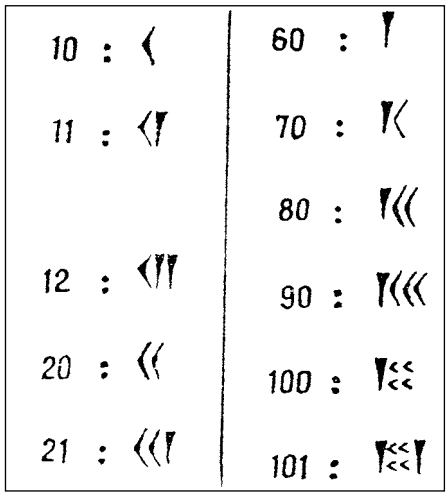


Fig. 19. *Semne speciale de la 10 la 100*

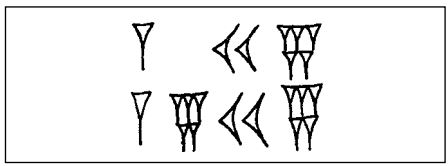


Fig. 20. *În loc de zero, spațiu liber*

Zero era marcat de babilonieni printr-un spațiu gol. Procedeul acesta îl găsim atestat pe un document din vremea suveranului Hammurabi sau Hammurapi (1728-1686 î.e.n.), cel care a fost adevăratul fondator al Regatului Vechi babilonian. Iată un exemplul extras din acest document (Fig. 20).

După cum vedem, pe rândul întâi e figurat numărul 1, urmat de un spațiu liber, apoi de reprezentarea numărului 25; pe rândul al doilea apar: 1, 5 și 25.

Sistemul de numerație de poziție sexagesimal a fost folosit pe întreg teritoriul Mesopotamiei și avea să se impună, în mileniul al III-lea î.e.n., grație geniului sumerian, învingătorilor

akkadieni, care foloseau sistemul cu baza 10. Ulterior, în viața de zi cu zi, avea să fie folosit, progresiv, sistemul de numerație cu baza 10, al akkadienilor, care supraviețuise. Sistemul de numerație de poziție sexagesimală a continuat să se mențină în comunitatea savantă și să progreseze prin adoptarea lui zero median.

Este de reținut că numerația babiloniană a supraviețuit îndelung datorită grecilor și arabilor, care au adoptat sistemul sexagesimal, acesta fiind mai lesne de mânuit decât sistemele lor savante de numerație. Un exemplu ne va convinge cât de comod le era grecilor să transcrie tăblițele babiloniene. Fie $36^o45'57''$ în scriere babiloniană:

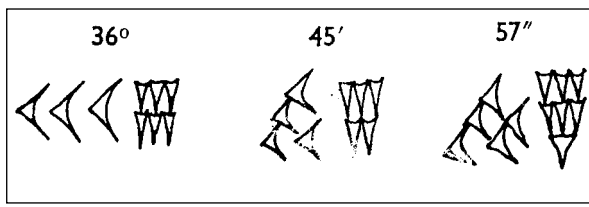


Fig. 21. *Un număr din scrierea babiloniană în transpunerea grecească*

Grecii menționau numărul de grad notând în limba lor cuvântul grecesc *grade*, după care scriau numărul echivalent pentru 36 (30 = λ și ϛ = 6); numărul minutelor 45 (40 = *m* și *e* = 5) era urmat de un accent; iar pentru secunde scriau 57 (50 = *v* și ζ =7), urmat de două accente. Numărul arăta astfel: λ ϛ μ ε ' *v* ζ "

Remarcăm, de asemenea, utilizarea, de către locuitorii Mesopotamiei, încă din timpuri foarte îndepărtate, a numerelor fracționare: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$.

Fantezia mayașilor

Mihaela o roagă pe Margareta să-i sugereze câteva repere pentru finalizarea studiului pe care trebuie să-l predea Arinei.

Mihaela: Am citit cu mult interes, chiar cu pasiune, despre sistemul de numerație al mayașilor, dar mă simt sufocată de informații și mi-e teamă că nu voi reuși să le prezint coerent. De aceea, apelez la tine. Ai experiență, ai finalizat studiul despre numerația la sumerieni și la babilonieni – sora mai mare a numerației mayașe.

Margareta: Eu cred că trebuie să abordezi, pentru început, următorul aspect: numerația mayașilor, ca și cea a sumerienilor și babilonienilor, folosea un sistem pozițional, superior însă, fiindcă l-au cunoscut pe zero operator. Arată-mi ce ai adunat în problema asta.

Mihaela: Uite, aici, tabelul lui G. Silvanus Morney pentru primele 19 numere:

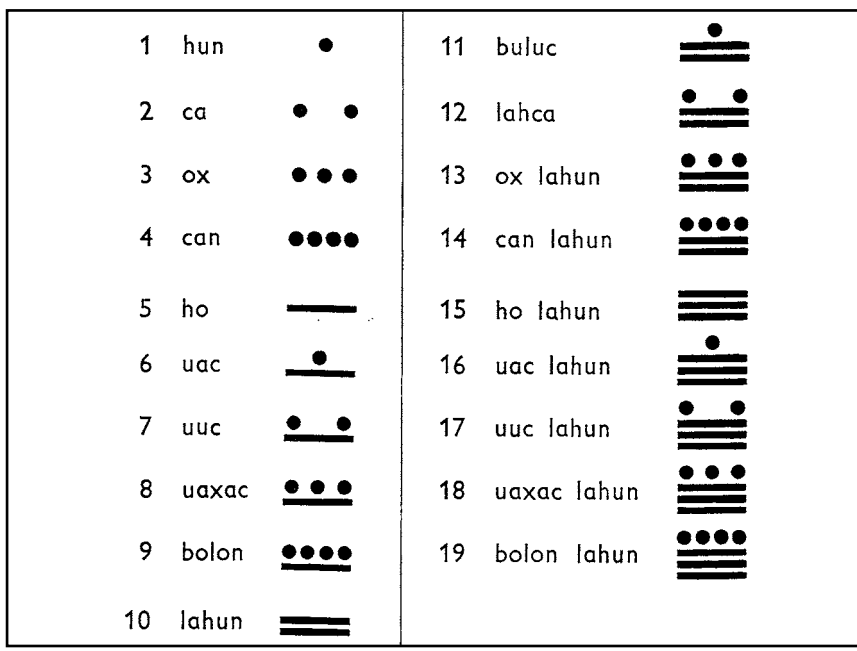


Fig. 22. *Numerele 1-19 în sistemul de notare mayaș*

(Reprodus după: G. Silvanus Morney, *The ancient maya,*. 3rd edition, Stanford University Press, 1947, p. 278)

Margareta: Și ce observăm?

Mihaela: Observăm că primele patru numere sunt reprezentate prin adunarea punctelor, iar numărul 5 printr-o bară orizontală; de la 6 la 9, acestei bare orizontale desemnând numărul 5 i se adaugă puncte; numărul 10 apare ca suma a două bare orizontale (5 + 5). Notarea numerelor de la 11 la 14 urmează un procedeu similar: se adună 10 cu 1, 2, 3 și 4, desenându-se două bare, la care se adaugă puncte (11 = 10 + 1; 12 = 10 + 2; 13 = 10 + 3 și 14 = 10 + 4). Ajungându-se la 15, se multiplică numărul barelor: 15 = 5 x 3, deci se trasează trei bare orizontale.

Margareta: Dar în privința denumirii numerelor?

Mihaela: Constatăm că primele 12 numere au nume complet deosebite; începând cu numărul 12, denumirile traduc modul de compunere a numerelor. În denumirea numărului 12 recunoaștem pe *lah*, contracția lui *lahun* = 10 și pe *ca* = 2. Compunerea denumirii numerelor de la 13 la 19 este riguros urmată: 3 și 10, 4 și 10 ș.a.m.d.

Margareta: De remarcat că acest procedeu de formare a denumirii numerelor se va regăsi în limba franceză, unde pentru 17 se spune 10 și 7; pentru 18 – 10 și 8; pentru 19 – 10 și 9, dar și în spaniolă, atunci când se trece de la 16 la 17.

Mihaela: În limba română, compunerea numerele de la 11 la 19 este însă absolut regulată (unsprezece…, nouăsprezece).

Margareta: Aici este de adăugat că, deși baza sistemului de numerație al mayașilor era 20, adică suma degetelor de la mâinile și picioarele omului – în concepția lor însuși omul –, reiese rolul pe care îl atribuiau numărului 10 ca bază auxiliară și numărului 5, ca important divizor al lui 10. Bobul de cacao, atât de

prezent în viața mayașilor, i-a inspirat, probabil, pe aceștia să-l aleagă drept simbol al unității, al numărului 1. Să mergem mai departe, Mihaela.

Mihaela: M-aș referi, apoi, la denumirile puterilor bazei, pentru că e un aspect foarte semnificativ. Astfel, 20 = *hun kal*; 20^2 = 400 = *hun bak,* 20^3 = 8 000 = *hun pic*, iar 20^4 = 160 000 = *hun cabal*. Multiplii bazei, adică 2 x 20 = 40; 3 x 20 = 60; ..., 10 x 20 = 200, erau botezați astfel: *ca kal*, *ox kal*, ..., *lakun kal.*

Margareta: Observăm că e vorba despre un sistem de numerație cu baza 20 de concepție primitivă, care folosea adunarea, sistem în care 5 joacă un rol privilegiat ca divizor. Deci ai putea să rezervi spațiu prezentării sistemului mayaș de numerație orală, deoarece îl consideri de o coerență remarcabilă.

Mihaela: De acord. Să abordăm acum partea cea mai dificilă, dar și cea mai interesantă și mai incitantă din sistemul de numerație mayaș – mecanismul de formare a numerelor de la 21 la 400. Referitor la numerele de la 21 la 40, să alegem, la întâmplare, un număr, să zicem *27*, care se exprimă prin *uuc tu kal* (unde *uuc* e 7, *tu* un prefix ordinal, „și“ este subînțeles, *kal* e 20). Constatăm că 27 e format din 7 (și) primul 20. Noi spunem douăzeci, apoi șapte, mayașii enunță mai întâi unitățile simple apoi zecile. Pentru numerele cuprinse între 41 și 60, să-l alegem pe *47 (uuc tu y ox kal,* unde *uuc* este 7, *tu* prefixul ordinal, *y* o *ligatură*, iar *ox kal* al treilea douăzeci, adică 60); constatăm că 47 este tradus ca *șapte unități din al treilea douăzeci* sau *șapte al treilea douăzeci*.

Margareta: Intervenția neașteptată a celui de-al treilea douăzeci e, într-adevăr, curioasă; să fie vorba de un arhaism?

Mihaela: Surpriza a fost și mai mare când am aflat din traducerea franceză a cărții lui Edward B. Taylor, *Civilizația primitivă,* publicată la Paris, în 1878, că în Groenlanda pentru 53 se spunea de la al treilea om, trei pe primul picior, care s-ar putea tălmăci ca trei degete de la primul picior al celui de al treilea om; la mayași, pentru 53 se spunea treisprezece din al treilea douăzeci, iar în unele dialecte treisprezece din al treilea om. Desăvârșită analogie!

Margareta: Văd că te referi la așa-numita botezare a numărului 47. De ce?

Mihaela: Aici e o problemă de viziune a mayașilor și groenlandezilor în construirea numerației. Dacă noi, românii, considerăm că 47 este cuprins între 40 și 50, baza noastră de numerație fiind 10, pentru mayași – care aveau ca bază pe 20 – numărul 47 este cuprins între 40 și 60, adică de două ori baza și de trei ori baza. Preocupați să boteze numărul 47, mayașii, conștienți că numărul depășise pe 40 (2 x 20), și-au îndreptat privirea spre 60 (3 x 20). Pornind la atac, ei au început să facă socoteli pe acest 60. Groenlandezii aveau o concepție asemănătoare cu a mayașilor: pentru 60 sau 3 x 20 (20 reprezentând un om), spuneau 3 oameni. Abordând în acest fel pe 60, groenlandezii au trebuit să spună „al treilea om" referindu-se la 53, cuprins între 40 și 60. Groenlandezii au numărat pentru 5 degetele unei mâini, pentru 10 degetele celor 2 mâini, pentru 15 degetele ambelor mâini și degetele unui picior.

Margareta: Mihaela, n-ar trebui să lipsească din referatul tău modalitatea de descifrare a sistemului mayaș de numerație.

Mihaela: Există în domeniul acesta destul de multă informație. Totul atestă că descifrarea s-a făcut prin cercetarea

gravurilor incizate pe stele funerare sau pe alte monumente și prin studiul codicelor mayașe. Au supraviețuit până la noi trei dintre aceste izvoare: *Codexul Trolortesianus* – lucrare de antropologie, descoperit în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, în Spania, și aflat în prezent la Paris; *Codex Pereseanus* – manuscris păstrat la Biblioteca Națională din Paris – și celebrul *Codex din Dresda*. Etnografului irlandez Eduard K. Kingsborough (1795-1837) îi datorăm imagini superbe ale acestor trei documente, incluse în tratatul său în 9 volume, intitulat: *The Antiquity of Mexico* (Londra, 1830).

Margareta: De ce e celebru *Codexul din Dresda?*

Mihaela: Trebuie să subliniez covârșitorul impact pe care l-a avut descoperirea lui pentru cunoașterea sistemului de numerație mayaș, dar și pentru cultură, în general. În acest codex, numerele apar scrise într-un sistem pozițional, alături de un număr impresionant de zerouri elegant desenate și colorate totdeauna în roșu.

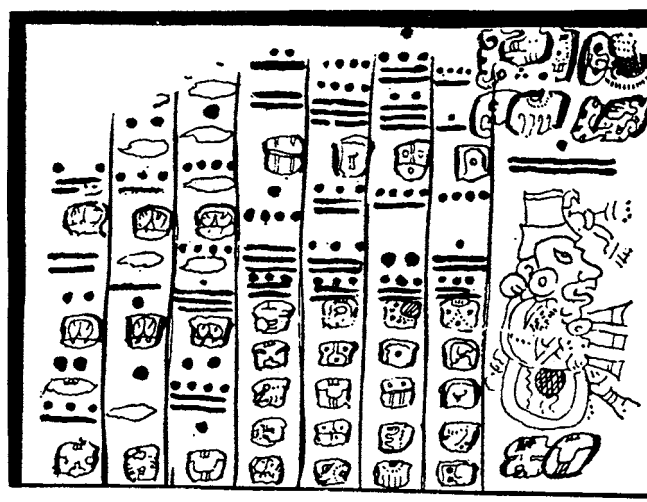


Fig. 23. *Codexul din Dresda*

Margareta: Unde a fost descoperit?

Mihaela: La Viena, în 1739; apoi a fost achiziționat de Biblioteca Regală din Dresda. În 1880, E. Forstemann a dat o ediția științifică a *Codexului*. Descoperirea lui a fost de interes capital pentru studiul calendarului și al sistemului de numerație mayaș. Iar studiul arheologului britanic John Eric Thompson (1898-1975), *Maya Arithmetic,* publicat în *Contribution to American Anthropology and History*, VII (1942), nr. 36, a suscitat un viu interes. Recunoaștem imediat, din textul *Codexului*, că este vorba despre o numerație de poziție, datorată grijii pentru înregistrarea economicoasă a numerelor. Menționarea lui zero este absolut naturală.

Margareta: Într-adevăr, fascinante desene! Ai vorbit despre numere înregistrate pe suport de hârtie. Dar trebuie să abordezi și numerele înregistrate pe stele funerare, pe suport de piatră.

Mihaela: Pe stelele din cetățile Copan și Palenc (în sud-vestul Yucatanului), arheologii, istoricii, matematicienii au descifrat mii de numere scrise în sistem pozițional și au putut urmări evoluția sistemului de notare mayaș în decursul vremurilor, până la stabilirea unui sistem de scriere definitiv. Corespondența dintre numere și simbolurile gravate pe piatră diferă de cea despre care am vorbit până acum. Simbolurile folosite pentru a stabili corespondența cu diferite numere erau realizate prin desene incizate, adesea reprezentând animale sau zei.

Margareta: La mayași, ca și la azteci, este atestat că efigia zeilor se putea substitui numerelor. Iartă-mă, Mihaela, dar poate că ar fi momentul să precizezi că sistemul de

numărare al mayașilor reprezenta, de fapt, instrumentul calendarului lor. Calendarele au jucat în viața mayașilor, ca și în cea a aztecilor, un rol deosebit de important. Să structurezi referatul ținând seama de asemenea repere. Trebuie să subliniezi că anul religios mayaș, bazat pe aceeași concepție ca și la azteci, folosea 20 de numere divine și introducea primele 13 numere. Durata anului era de 260 de zile, rezultat al produsului dintre cele 13 luni a câte 20 de zile (corespunzând bazei de numerație a precolumbienilor). În acest an religios, construit dintr-un ciclu arbitrar de 260 de zile, format din combinarea a 20 de semne și 13 cifre, fiecare zi era determinată de un semn și de o cifră. Se ajungea, în felul acesta, la o succesiune a zilelor de felul următor:

1 A 2 B 3 C 4 D 5 E 6 F 7 G 8 H 9 I 10 J 11 K 12 L 13 M
1 N 2 O 3 P 4 Q 5 R 6 S 7 T 8 A 9 B 10 C 11 D 12 E 13 F
1 G 2 H 3 I 4 J etc.

Mihaela: Îți mulțumesc, Margareta, pentru precizările tale. Și eu îmi notasem că mayașii au inventat numeroase simboluri în vederea înregistrării timpului. Bunăoară, existau la ei 13 zei ai zilelor: 1 – *Caban*; 2 – *Ezmab*; 3 – *Canuac*, 4 – *Ahau*; 5 – *Imix*; 6 – *Ik*; 7 – *Akbal*, 8 – *Kan*; 9 – *Chicchan*; 10 – *Cimi*; 11 – *Manik*; 12 – *Lamat*; 13 – *Muluk*. Ei erau în conexiune intimă cu primele 13 numere. Numărul 13 a jucat un rol deosebit la precolumbieni. În America Centrală, o credință foarte răspândită evoca 13 Ceruri și, prin urmare, 13 Zei ai Cerurilor. Acești zei erau plasați pe paliere succesive, doi de fiecare palier, iar al 13-lea, așezat cel mai sus, domina ansamblul. Zeii aceștia guvernau succesiunea zilelor.

Margareta: Din cercetarea *Cabalei* reiese că numărul 13 este numitor comun pentru numele lui Dumnezeu, al alesului Lui pentru a-L face cunoscut Lumii – Moise –, pentru locul unde i-a fost relevată acestuia Legea, cât și pentru numele primilor patriarhi. Mă întreb dacă există vreo legătură între impactul obsedant al numărului 13 la israeliți și la populațiile din America Centrală. Pe baza teoriei puțin cam uluitoare a lordului Eduard K. Kingsborough și a unor eruditi contemporani lui, se poate, oare, emite ipoteza că indigenii din America ar fi fost supraviețuitori ai triburilor lui Israel?

Mihaela: În figurarea numărului 13 și a celor șase numere care îi urmează, mayașii ne oferă o nouă surpriză. Deja numărul 13 poate fi transpus în două reprezentări, fie ca un zeu cu nas lung și cu trompă, fie ca zeul lui 3, care în loc de bărbie are un cap de mort. Începând cu numărul 14, această îmbinare între 10 (Zeul Cimi – cap de mort) și numărul unităților simple devine regulă generală. Pe fiecare față a unui zeu apare maxilarul unui cap de mort, care simbolizează numărul 10. Ingeniozitatea mayașilor în transpunerea numerelor era deosebită. Astfel, pentru reprezentarea numărului 16 au gravat o maimuță ținând în lăbuțele ei ridicate capul Zeului 6, în timp ce

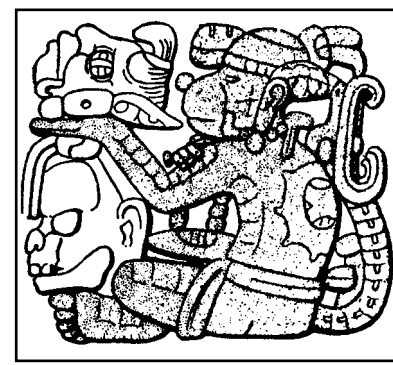


Fig. 24. *Reprezentarea numărului 16 la mayași*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 413)

capul Zeului Cimi se sprijină pe membrele ei inferioare, după cum se vede în imaginea precedentă (Fig. 24). În alte cazuri, ei figurau doi zei unul lângă altul, a căror valoare însumată era numărul căutat. Totul atestă o evoluție spre abstractizare și mărește interesul cercetătorilor pentru această scriere figurativă. Uneori, identificăm juxtapunerea semnului numeric și al Zeului Cimi; astfel, pentru a-l reprezenta pe 19, numărul 9 a fost notat cu 4 cercuri mici și o bară verticală, totul precedându-l pe Cimi, cap de mort.

Margareta: Ai procedat foarte bine precizând că mayașii, ca și aztecii, au folosit, pe lângă calendarul religios, un calendar „civil", cunoscut sub numele de *calendar al anului vag*. Anul vag, incluzând 365 de zile, era format din 18 luni a câte 20 de zile + 5 zile.

Mihaela: Determinarea anului *tropic* de către mayași este demnă de știința modernă (Anul tropic = durata dintre două treceri consecutive ale Soarelui prin punctul vernal, respectiv prin punctul în care ecliptica, adică orbita imaginară descrisă de Soare în mișcarea lui anuală aparentă pe sfera cerească, intersectează planul Ecuatorului, la echinocțiul de primăvară. Anul tropic are 365 de zile, 5 ore, 46 minute și 46 de secunde). Ținând seama că 365 împărțit la 20 dă rest 5, combinarea celor două caractere face ca numai 4 dintre cele 20 de semne ale zilelor să poată marca începutul anului. Deoarece 365 împărțit la 13 dă restul 1, rezultă că oricare dintre cele 13 cifre putea marca începutul anului nou, iar fiecare zi era marcată printr-o cifră mai mare cu o unitate decât cifra care marca ziua corespunzătoare din anul precedent. În consecință, repetarea unui an în care zilele erau notate cu aceeași cifră sau cu același semn al unui an dat avea loc numai după un ciclu de 52 de ani.

Margareta: Să scrii neapărat și despre ingenioasa ideea a mayașilor de a pune de acord cele două tipuri de calendar, considerând simultan o zi determinată de anul religios și ziua corespunzătoare a anului vag și punând bazele a ceea ce savanții numesc *Calendarul rotund*.

Mihaela: Așa cum remarcă și Geneviève Guitel – pe care am amintit-o mai înainte –, „*meritul mayașilor rămâne imens: au inventat o numerație de poziție cu baza 20 folosind scrierea numărului 5 ca bază auxiliară, au inventat un simbol pentru zero, au jonglat cu numere foarte mari, dar calculele lor s-au limitat la adunare și scădere. Folosirea exclusivă a numerației lor pentru măsurarea timpului a fost păgubitoare pentru matematică, împiedicându-i să realizeze clar importanța lui zero operator și să inventeze operațiile-cheie: înmulțirea și împărțirea. Mayașii nu cunoșteau decât numerele întregi; ideea de fracție le era total străină, doar ideea de jumătate* – katun – *le era familiară. În plus, trebuie subliniat că s-au jucat în mod magistral cu numerele întregi, că au introdus divizorii privilegiați și multipli ai numerelor fundamentale, rezolvând cu ajutorul tabelelor, elaborate inteligent, probleme de analiză nedeterminată*“.

Dinamismul numerației chineze

Chinezii au folosit numerele încă din preistorie. Sistemul lor de numerație a fost conceput în baza 10. Limba chineză a utilizat denumiri monosilabice distincte atât pentru primele zece numere, cât și pentru următoarele trei puteri ale numărului 10. Cele mai vechi urme de numerație scrisă la chinezi le aflăm în textele de ghicit gravate pe oase (1400-1100 î.e.n.) sau pe monede.

Rolul pe care l-au jucat la romani pietricelele a fost deținut în China de bețișoare. Pentru scrierea unui număr, chinezii aranjau bețișoarele pe o tablă liniată sau pe un caroiaj (rețea de pătrățele asemănătoare cu cea din caietele școlare de aritmetică). Analiza zecimală a numărului era dată de însuși enunțul lui în limba chineză, așa încât se așeza în coloana din dreapta un număr egal cu numărul de unități, iar în coloana din stânga lui un număr de bastonașe egal cu numărul zecilor ș.a.m.d.

Așa cum atestă o seamă de inscripții din secolele XV-XIV î.e.n., chinezii foloseau un sistem zecimal cu 13 caractere numerice fundamentale, primele nouă numere și primele patru puteri ale lui 10, ceea ce permitea reprezentarea oricărui număr până la 100 000 000. Deci, folosind exclusiv cuvintele care desemnează primele nouă numere întregi și numerele zece, o sută, o mie, zece mii, chinezii au putut scrie *în întregime* orice număr inferior lui 100 000. Transpunerea în cuvinte a numerelor o mai folosim și noi atunci când completăm acte bancare, de teama fraudelor. A fost triumful traducerii unei numerații scrise datorate cuvântului la chinezii din Antichitate. Ordinea cuvintelor într-un enunț fiind un element fundamental pentru înțelegerea unui număr, era ușor de înțeles că *zece doi* înseamnă 12, pe când *doi zece* înseamnă 20. Pentru puteri mai mari decât 10^4, au fost necesare simboluri noi. Chinezii utilizau unități de ordin superior, pentru 10^5, 10^6, 10^7 sau 10^8 etc., ca nu cumva să apară vreodată, în expresia unui număr, două caractere numerice identice juxtapuse.

Cea mai veche formă de numerație scrisă chineză apare în textele de ghicit. Unitatea e reprezentată printr-o liniuță orizontală, iar numerele 2, 3, 4 prin două, trei, patru liniuțe orizontale juxtapuse. Cu numărul 5, apare o schimbare, forma acestuia fiind a majusculei X închisă jos și sus; numărul 6 era reprezentat printr-un fel de mică pagodă; 7 – printr-o cruce; 8 – prin curbe care semănau cu paranteze plasate spate în spate; numărul 9 avea un caracter mai complex: un fel de S stilizat având deasupra un mic unghi. Numerele următoare

prezentau o configurație mai simplă. 10 se nota ca o liniuță verticală, 20, 30, 40 se înrudeau ca aspect cu 10, ilustrând de câte ori a fost repetat 10, cu ajutorul unei ligaturi. Semnele pentru 50, 60, 80 foloseau simbolurile lui 5, 6, 8 surmontate de o foarte mică liniuță verticală, care desemna rolul numărului 10. Numărul 100 era reprezentat printr-un semn în întregime nou, care prin adăugarea unei liniuțe orizontale devenea numărul 200, iar prin adăugarea a două astfel de liniuțe devenea 300. Semnul pentru 100 surmontat de numărul 5 îl reprezenta pe 500, surmontat de 6, pe 600. Semnul pentru 1 000 pare destul de complex, seamănă puțin cu 7 al nostru. Dacă acest semn este marcat de numerele 3, 4 sau 5, devine 3 000, 4 000 sau 5 000.

În timp ce pentru numerele 1-4 și 10-40 mecanismul de formare era aditiv, pentru 5-9 se recurgea la semne independente. Sutele și miile par a fi fost supuse mecanismului multiplicativ. Numerele acestea au fost descoperite pe mii de texte de ghicit, lesne de citit, fiind gravate, adesea, pe oasele omoplatului. Reproducem, mai jos, un tabel al numerelor înregistrate pe textele de ghicit:

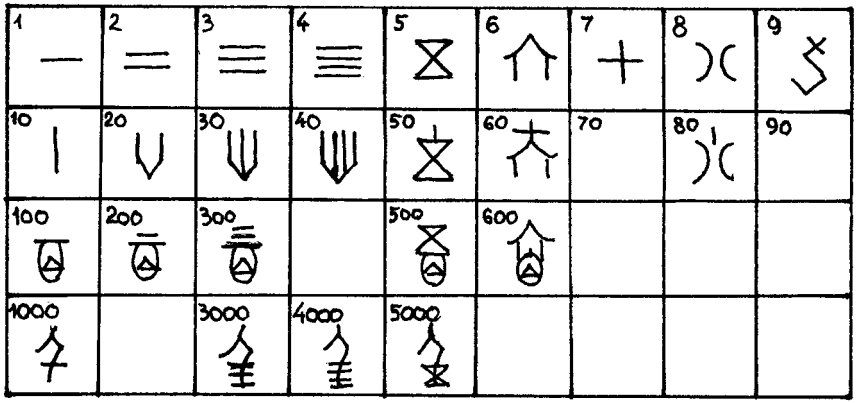


Fig. 25. *Numerația din textele de ghicit chineze*
(Reprodus după: J. Needham, *Science and Civilisation in China,* vol III, Cambridge, 1959)

Acest tabel prezintă goluri. Constăm că lipsesc semne pentru numerele 70, 90, 400, 700, 800, 900, 2 000, 8 000, 9 000. Din păcate, chiar și pentru numere mai mici nu au fost descoperite reprezentări, încât nu se știe în ce fel notau chinezii numerele 16, 17, 18 și 19.

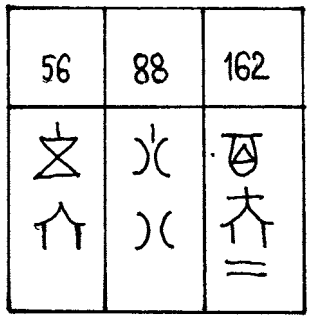


Fig. 26. *Reprezentarea numerelor 56, 88 și 162 în textele de ghicit chineze*
(Reprodus după: J. Needham, O *p.cit.*, 1959).

După cum se poate observa în tabelul din Fig. 26, chinezii notau în textele de ghicit pe 56 ca sumă a lui 50 și 6, pe 88 ca suma lui 80 și 8, pe 162 ca sumă a lui 100 și 60 și 2 ș.a.m.d.. Numerele erau scrise de sus în jos, pe verticală, în ordinea descrescătoare a nodurilor, întâi zecile, apoi unitățile simple (56 = 50 + 6; 88 = 80 + 8; 162 = 100 + 60 + 2).

Din investigațiile istoricilor și matematicienilor aflăm că unul și același număr a fost transpus în mai multe modalități. Potrivit lui J. Needham, inițial numărul 88 era notat cu:)ı( )(

În secolul I e.n., modul de scriere a numerelor se schimbă. Dacă în primă fază 88 se scria pe orizontală, în cea de-a doua era reprezentat pe verticală:

)ı(
)(

După 12 secole, se păstrează verticalitatea, dar parantezele care figurează numărul se înjumătățesc grafic și apare între ele o cruce:

)ı(
+
)(

În fața eleganței grafiei chinezești a numerelor, trasate cu pensula, simt nevoia să reproduc o pagină mai mult decât reprezentativă sub acest aspect:

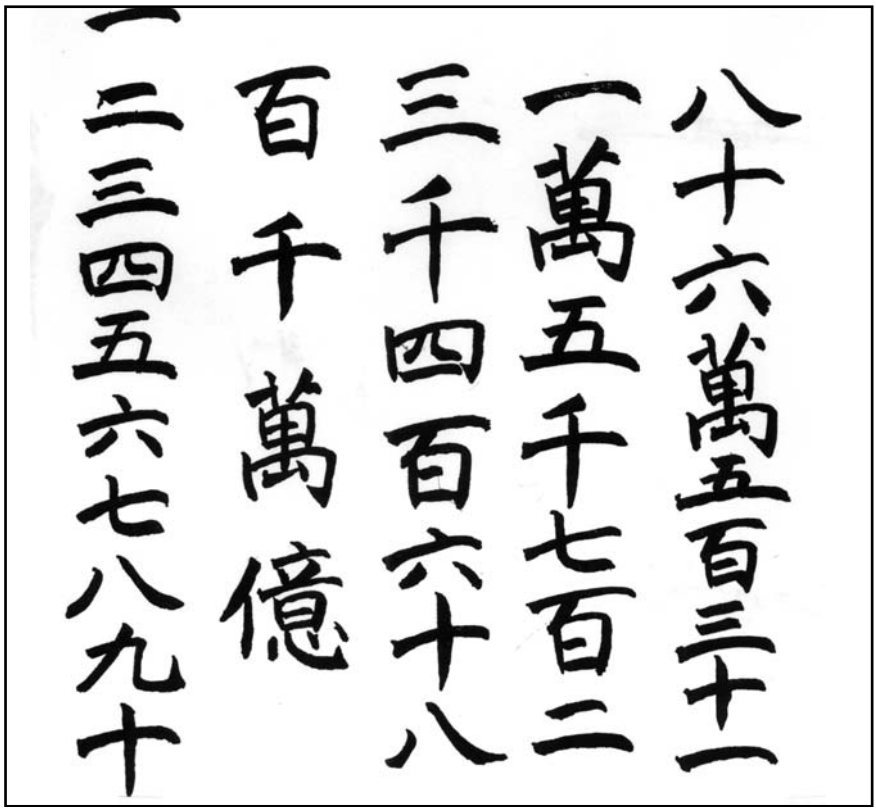


Fig. 27. *Exemplu de grafie chinezească a numerelor*
(Reprodus după: Ore Oystein, *Number Theory and History,*. New York, McGraw – Hill Book Company, 1948)

Coloana întâi figurează numerele de la 1 la 10, cea de a doua numerele 100, 1 000, 10 000, 100 000 000. Următoarele trei coloane reprezintă trei exemple de transcriere, respectiv a numerelor 3 468, 15 702 și 860 531.

E ușor de citit numărul 3 468; parcurgând de sus în jos coloana a treia, recunoaștem semnele: 3; 1 000; 4; 100; 6; 10; 8 (3 x 1000; 4 x 100; 6 x 10; 8). Al treilea exemplu e mai greu de citit, fiindcă absența unui simbol original pentru 10^5 duce la presupunerea că 10^4 reprezenta un palier, încât numărul se descompune în 86 x 10^4 + 531.

Chinezii au reușit să depășească pragul sistemului de numerație prezentat de Ore Oystein (10^4). Numerația orală elucidează modul în care a fost depășit acest prag pentru numere mari, mergând până la 10^8, și anume prin folosirea cuvintelor compuse. Astfel, după cum arată Karl Menninger, istoric german al științei, chinezii notau:

10^5	10^6	10^7	10^8
shih *wan*	pai *wan*	chhien *wan*	*wan wan*

Iată cum îl notau chinezii pe 500 000, adică 5 x 100 000 = 5 x 10^5. Știm că 5 se pronunța *wu*. Deci putem scrie *wu shih wan*. Încă un exemplu: pentru 500 000 000 (5 x 10^8) se scria *wu wan* wan. Trebuie să menționăm că folosirea lui zero sub forma unui cerc a apărut în scrierea numerației chineze de-abia în secolul al VIII-lea.

Fiindcă π este un număr important, care a suscitat mii de ani interesul matematicienilor și al amatorilor, transpunem în vocabule chineze valoarea lui, adică 3,1415927 = 3 *chang,* 1 *chhih,* 4 *tshun*, 1 *fên,* 5 *li,* 9 *hao,* 2 *miao,* 7 *hu.* Am aflat în acest fel că termenii: chhih, tshun, fên… desemnează fracții zecimale.

Pentru cititorul dornic de aprofundări, reproducem un tabel care ilustrează pronunțarea veche și cea modernă a numerelor chineze (vezi Fig. 28, p. 118).

Cu ajutorul fișelor de calcul (*rod-numerals*), chinezii au construit un sistem de numerație la origine figurativă, având ca suport un fel de eșichier, de care s-au dispensat ulterior, reușind să pună bazele unui sistem de numerație de poziție. Bastonașele de fildeș sau de bambus cu care operau au oferit sistemului de numerație o reprezentare geometrică. Iată cum erau grupate fișele de calcul: pentru numărul 5 și pentru cele inferioare acestuia se aliniau atâtea fișe câte reprezenta numărul; pentru 6, o fișă era surmontată de o altă fișă; în cazul numărului 7 (2 + 5), se puneau două fișe verticale și o fișă orizontală ș.a.m.d. Numerele de la 2 la 5 se obțineau deci prin repetarea lui 1 (liniuță verticală), iar numerele de la 6 la 9 se construiau dintr-o liniuță orizontală în loc de 5 și din adăugarea de

Scriere curentă în cifre arabe	Numere			Cifrele bastonașe
	Scrierea	Pronunțarea		
		veche	modernă	
1	一	ẓiĕt	yi	I
2	二	ñi'	ar	II
3	三	sâm	san	III
4	四	si'	sî	IIII
5	五	'ngo	wu	X
6	六	liuk	liou	T
7	七	ts'iĕt	ț'si	TI
8	八	pat	pa	TII
9	九	'kiŏu	țiou	TIII
10	十	žiop	șî	—
100	百	pɛk	pai	
1000	千	ts'ien	țsien	
10000	萬	müAn	wan	

Fig. 28. *Cifrele chineze*

(Reprodus după: *Istoria generală a științei,* București, 1970, p. 188)

liniuțe verticale, adică o liniuță pentru 6 …, 4 liniuțe pentru 9, ceea ce putea duce la grave erori. Iată primele nouă numere întregi în rod-numerals:

Pentru evitarea confuziilor, chinezii au trecut la folosirea fișelor atât în poziție verticală, cât și în poziție orizontală.

Zecile se notau în felul următor: 10 printr-o bară orizontală; 20, 30, 40 și 50 prin 2, 3, 4 sau 5 bare orizontale paralele; 60 era alcătuit dintr-o bară verticală, având valoarea 50, și o bară orizontală, având valoarea 10; 70, 80, 90 însumau pe 50 cu 20, 30 și 40, după cum se vede mai jos:

Zecile, sutele, miile și miliardele erau notate de la stânga la dreapta, aproximativ cum se proceda pe coloanele abacului.

Au fost descoperite, în texte foarte vechi, numerele 12, 25, 46, 69 și 99, în reprezentare pozițională, în felul următor:

12: I II (10 + 2); 25 II IIIII (20+5);
46 IIII T (40 + 6); 69 T IIIII (60 + 9);
99 IIII T IIII (90 + 9).

De remarcat că, în timpul dinastiei Han (206 î.e.n.-220 e.n.), chinezii știau să efectueze pe suportul de socotit înmulțiri, împărțiri și extragerea rădăcinilor.

Indienii notau ușor numere mari

Din anii 1500-1000 î.e.n. ai epocii vedice, nu ne-au parvenit texte de matematică. Limba în care au fost scrise *Vedele*, o sanscrită arhaică, atestă utilizarea de numere foarte mari. Ea poseda denumiri speciale pentru toate puterile lui 10 până la 10^8.

Sistemul de numerație a fost dezvoltat, de altfel, prin introducerea, începând din secolul al V-lea î.e.n., în sanscrita clasică, a unor denumiri pentru toate puterile lui 10 până la 10^{23}. Nu avem informații despre existența, în acele timpuri, a unor notații bazate pe cifre.

Cele mai vechi urme de numerație scrisă sunt atestate în India începând de la mijlocul secolului al III-lea î.e.n. și sunt conținute în *Inscripțiile lui Asoka* (Asoka a domnit între 269 și 232 î.e.n. și a fost unul dintre cei mai vestiți suverani ai Indiei; el a unificat întreaga Indie și a stabilit relații cu statele elenistice). *Inscripțiile* au fost redactate în două limbi: *kharosti* (folosită în extremul vestic al Indiei), în jurul anului 250 î.e.n., și *brahmi*, limbă vorbită în tot restul Indiei până la începuturile Creștinismului. Acest tip de numerație, care a dăinuit în forme similare până la începutul erei noastre, și, în unele părți ale Indiei, chiar și mai târziu, folosea simboluri distincte nu numai pentru fiecare unitate, ci și pentru toți zecii și toate sutele. Astfel, numerele 3, 30, 300, 3 000 erau notate, fiecare, cu un simbol propriu. Cât despre scrierea kharosti, aceasta este o transpunere a vechii scrieri fonetice indiene cu caractere ale alfabetului aramaic, modificate și îmbogățite cu semne complementare. Numerația legată de această scriere este unica din India în care se scrie de la dreapta la stânga, ceea ce ne îndreptățește să credem că este de origine străină.

Tabloul de mai jos ilustrează modalitatea în care erau notate numerele în scrierea kharosti:

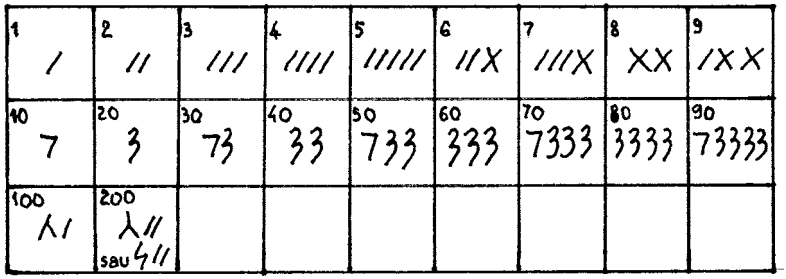


Fig. 29. *Numerația în scrierea kharosti*
(Reprodus după: Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer Eine Kulturgeschichte der Zahl,* ediția a 2-a, vol. I, Vandenhoeck und Ruprecht, Gõttingen, 1958)

Numerele de la 2 la 5 erau reprezentate prin repetarea numărului 1; pentru numerele 6-9 se folosea semnul X, care îl simboliza pe 4 și la care era adăugat numărul sau numerele dorite. Astfel, se nota 4 + 2 pentru 6; 4 + 3 pentru 7; 4 + 4 pentru 8; 4 + 4 + 1 pentru 9. Nodurile zecilor de la 30 la 90 erau scrise prin repetarea semnelor reprezentându-i pe 10 și 20. Numărul 10 avea un simbol propriu. Semnul pentru 20 nu era cel pentru 10 dublat, ci, probabil, o ligatură; el semăna cu trei al nostru. Zecile de la 30 la 90 se obțineau, deci, prin repetarea acestor semne: 30 = 20 + 10; 40 = 20 + 20; 50 = 10 + 20 + 20; 60 = 20 + 20 + 20; 70 = 10 + 20 + 20 + 20; 80 = 20 + 20 + 20 + 20; 90 = 10 + 20 + 20 + 20 + 20. Notarea sutelor era limitată, apărea un semn nou pentru 100.

Numerele scrise în vechea modalitate vor evolua pe parcursul secolelor:

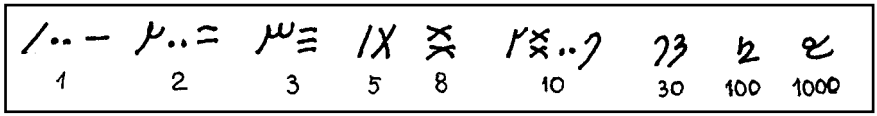


Fig. 30. *Cifre indiene din secolele I și II e.n.*

Observăm astfel folosirea pentru numerele 1, 2, 3 a unor notații mai speciale, un nou semn pentru unitate funcționa alături de liniuțe. În ceea ce privește grafia lui 100, ea este complet diferită în secolul al II-lea al erei noastre față de cea din secolul al II-lea î.e.n.

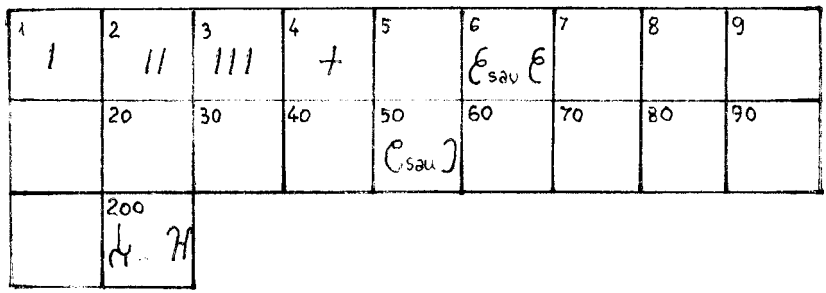


Fig. 31. *Numere în scrierea brahmi*

Numerația legată de scrierea brahmi a avut, ulterior, un impact deosebit în crearea sistemului zecimal pozițional. La origine, ea nota numerele 1, 2 și 3 cu liniuțe verticale, pe 4 cu ajutorul unei cruci, iar pe 6, 50, 200 prin semne speciale, după cum se vede din figura de mai jos. Avem prilejul aici să urmărim și modul cum se putea nota cu ajutorul acestor semne numărul 256:

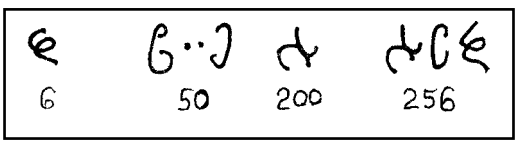


Fig. 32. *Numărul 256 în notația brahmi*

În timp ce scrierea kharosti constituia un sistem zecimal nepozițional, având semne distincte pentru 1, 4, 10, 20 și 100, scrierea brahmi va prezenta semne distincte pentru primele nouă numere și pentru zeci, sute și mii; sutele și multiplii miilor se obțineau pe baza principiului multiplicativ. Se distinge în numerația brahmi noțiunea de rang superior lui 10. Suntem în fața unei treceri spre o scriere poziționlă. Poziția sau rangul este indicată cu ajutorul unui semn.

În jurul anilor 600, a apărut o scriere care utiliza numai primele nouă semne ale scrierii brahmi, numerele fiind transpuse nu după vechea metodă brahmi, ci în sistemul scrierii poziționale.

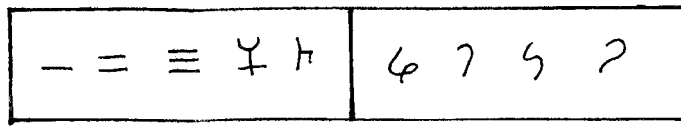


Fig. 33. *Scriere brahmi care transpune numerele în sistemul notației poziționale*

Numerația grotelor. Descoperirile făcute în grote atestă o mare diversitate de notare a numerelor. În grotele de la *Nana Ghat*, care păstrează inscripționări făcute cu două secole înaintea erei noastre, sunt atestate semne pentru numerele 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 20, 60, 80, 100-200, 400, 700, 1 000, 4 000, 6 000, 10 000, 20 000. Formarea nodurilor sutelor și miilor atrage atenția; cifrele pentru 100 și 1 000 reapar în regula de formare a celorlalte numere. În numerația din grotele de la *Nasik*, care conservă înregistrări din secolul al II-lea al erei noastre, numerele se prezintă atât sub formă de semn, cât și de cuvânt. Deși putem constata similitudini cu numerația chineză a textelor de ghicit, numerația indiană este superioară celei din sistemul chinez. Sunt atestate semne pentru numerele 1-10, 20, 40, 70, 100, 200, 500, 1 000-4 000, 8 000 și 70 000.

Cele mai vechi inscripții ale *numerației tamul* provin din secolul I al erei noastre și au fost descifrate de pe vase de lut. Tamul (tamil) este cea mai veche limbă din familia idiomurilor dravidiene, vorbite în sudul Indiei și în Sri Lanka. Numerația tamul are baza 10 și operează cu nouă simboluri pentru unități și cu trei simboluri pentru 10, 100 și 1 000.

Așa-numita *numerație singaleză*, folosită până azi în India, se situează din punctul de vedere al concepției între numerația grotelor și cea tamul, dar este mai apropiată de aceasta din urmă. Cifrele singaleze ale locuitorilor din Sri Lanka emigrați din India fac parte din categoria semnelor contrase, contopite.

Inscripțiile indiene din primele secole ale erei noastre atestă notarea de semne deosebite pentru numere în diferite regiuni, unele fiind obținute prin repetare, altele prin multiplicare. De exemplu, 4 000 este notat prin semnul lui 1 000 având la dreapta semnul numărului 4. Inscripții din respectiva perioadă relevă folosirea acestui mod de reprezentare a numerelor până la 70 000, după cum se poate vedea mai jos:

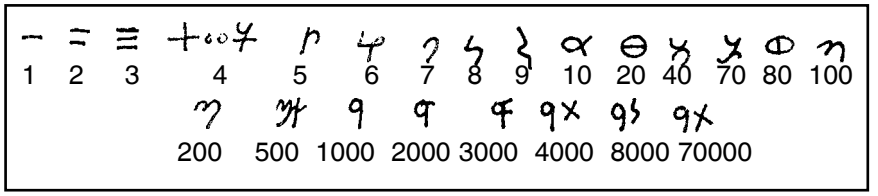


Fig. 34. O reprezentare indiană a numerelor 1-70 000
(Reprodus după: *Istoria generală a științei*, vol. II, p. 173)

Mai vechi sau mai noi, toate tipurile de numerație utilizate în India l-au avut ca bază pe 10. Această bază este superioară bazei 5, prea mică, și, de asemenea, bazelor 20 și 60, prea mari pentru memoria omului.

Am văzut că până la apariția sistemului zecimal pozițional, în India au fost utilizate o mulțime de sisteme de numerație și de cifre. Tentativele de optimizare a sistemului au făcut ca această varietate de sisteme să se apropie, în diferite regiuni ale Indiei, de sistemul pozițional. În inscripțiile din secolul al VII-lea din Cambodgia și Indonezia se folosea și semnul 0, sub formă de punct sau de cerculeț.

Scrierea zecimală pozițională apărută în secolul al VII-lea se desăvârșește la începutul secolului al IX-lea. Zero era notat, pe atunci, printr-un punct. Această scriere s-a propagat mai târziu în toată lumea, datorită arabilor. Nu se știe însă exact când a fost inventată de indieni, fiindcă nu a fost folosită imediat după apariție, și nu în întreaga Indie. S-ar putea ca ea să nu fi fost semnalată în

documente imediat după apariție sau ca documentele în care a fost semnalată să se fi pierdut.

Cea mai importantă atestare a sistemului de numerație indian este inscripția de la Gwalior (o localitate situată la aproximativ 300 de km sud de New Delhi). Inscripția este datată 933, dar, în realitate, corespunde anului 876. Ea consemnează, în sfârșit, apariția numerației scrise de poziție și pe zero operator, care figurează de două ori.

După cum susține D.E. Smith (*History of Mathematics,* vol. II, New York. p. 70), cifrele atestate pe inscripție sunt 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, iar 0, 4 și 6 lipsesc, așa cum se vede mai jos:

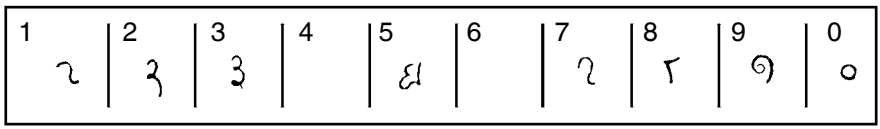


Fig. 35. *Cifre atestate pe inscripția de la Gwalior*
(Reprodus după: David Eugene Smith, *History of Mathematic*, vol. II, New York, Dover Publications, 1958, p. 70)

Karl Menninger a completat șirul acestor numere cu 0, 4 și 6, după cum arată Geneviève Guitel. El a folosit în acest scop gravurile de cupru contemporane epocii.

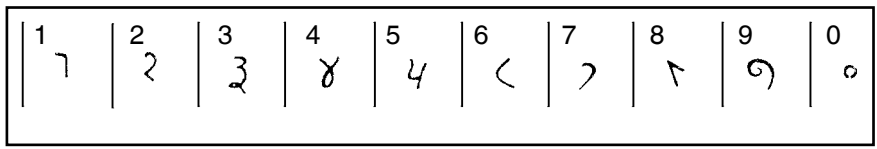


Fig. 36. *Cifre prezentate de Karl Menninger*
(Reprodus după: *Zahlwort und Ziffer Eine Kulturgeschichte der Zahl*, ediția a II-a Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1958, p. 233)

După cum se observă din acest tablou, zero operator figurează clar și seamănă cu zeroul median, care fusese atestat cu două secole mai înainte în India. Primele trei numere sunt prezentate prin semne originale, care au pierdut orice urmă figurativă. Ne aflăm, într-adevăr, în fața unui progres semnificativ legat de apariția numerației scrise

de poziție. Să nu uităm că scrierea din China vecină, deși de poziție, a rămas tot figurativă.

Interesante sunt, de asemenea, două inscripții gravate pe un mic templu situat pe drumul care duce la Gwalior. În prima inscripție, redactată în sanscrită și datată 932, numărul este simbolizat doar cu litere. Cea de a doua inscripție, în sanscrită, datează din anul 933. Anul este marcat atât cu litere, cât și cu cifre, care seamănă foarte mult cu cele pe care le folosim în zilele noastre. Este vorba despre o donație făcută unei grădini de flori și în care sunt menționate: o suprafață de pământ de 270 de hasta lungime și 187 de hasta lățime; 50 reprezintă contribuția zilnică pe care corporația grădinarilor urma s-o dea templului, adică 50 de ghirlande de flori de sezon. Reproducem, mai jos, aceste numere:

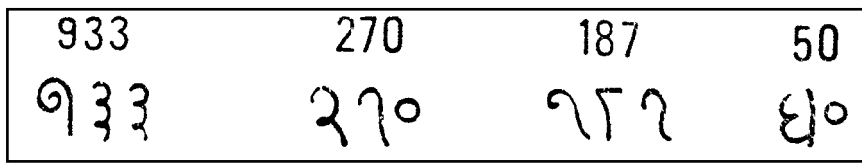


Fig. 37. *Cele patru numere gravate pe micul templu din apropierea Gwaliorului*
(Reprodus după: Geneviève Guitel, *Op. cit.*, p. 620)

Numerația indiană s-a răspândit în timp, mai întâi în aria Eufratului. În anul 720, apare, în China, un text de numerație indiană de poziție, în care figurează și zero operațional. La sfârșitul secolului al VIII-lea, numerația pozițională indiană era cunoscută la Bagdad, iar învățații arabi aplicau cu succes acest sistem.

În Europa, pătrunderea numerației indiene a început prin intermediul arabilor, în Peninsula Iberică. Un rol remarcabil în răspândirea ei l-a avut eruditul francez Gerbert d'Aurillac (938-1003), devenit Papa Silvestru al II-lea (999-1003), autorul volumului *Regula abaco computi*.

Impactul hotărâtor în răspândirea cifrelor indiene și a scrierii poziționale a numerelor se datorează traducerilor în limba latină a

aritmeticilor arabe, îndeosebi a aritmeticii lui al Horezmi. În secolul al XV-lea, algoriștii, adepții noilor metode de calcul, obțin o victorie definitivă asupra abaciștilor, adepți ai vechilor metode.

Cel mai târziu în secolul al X-lea, varianta apuseană a noii scrieri, numită *gubar* (nisip, praf), ajunge în Spania maură și este folosită în calculele comerciale efectuate pe abacul acoperit cu nisip.

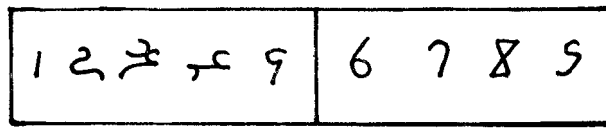


Fig. 38. *Varianta gubar*

Indienii s-au preocupat de folosirea numerelor și în poezie. În poemele cu adresă didactică, numerele erau prezentate cu ajutorul cuvintelor-simbol. În celebrul poem *Sürya Siddhânta*, întâlnim cuvintele *vid* pentru 0, *cuplu* pentru 2, *foc* pentru 3, *ocean* pentru 4, *șarpe* pentru 8.

Remarcăm, apoi, interesanta notare a numerelor *cu ajutorul silabelor*, datorată lui Aryabhața, unul dintre cei mai originali autori ai științei indiene (născut, probabil, în 476). Aryabhața a folosit pentru tabelele numerice o notație foarte concisă a numerelor mari, care atribuie silabelor valori numerice convenționale. După o analiză fonologică profundă a vechilor gramatici indiene, celor 25 de ocluzive pronunțate împreună cu vocala *a* și clasate în guturale, palatale, etc. li s-au atribuit valori de la 1 la 25, iar semivocalele, siflantele și aspiranta *ha* au primit valori de zeci, de la 30 la 100. Când vocalele și diftongii înlocuiau vocala *a* în aceleași silabe, numărul exprimat se înmulțea cu un factor de la 10^2 până la 10^{16}. De exemplu: $ga = 3$, $gi = 300$, $gu = 30\ 000 = 3x10^4$, $gr = 3x10^6$, $gl = 3x10^8$ etc. (orice deplasare în șirul vocalelor și al diftongilor reprezenta o amplificare cu 10^2).

Numerația inventată de Aryabhața este marcată de influența silabelor arabe. Acestea sunt responsabile de incoerența notației numerelor de la 1 la 100 și, de asemenea, de nefericita introducere a lui 100 ca bază auxiliară, dar, datorită vocalizării silabelor, Aryabhața reușește să noteze numerele foarte mari cu o extremă ușurință.

Itinerarul numerației la români

După cum o spune însuși titlul de mai sus, adoptarea sistemului de numerație pe care-l folosim astăzi are antecedente diverse și de veche sorginte, indicînd implicarea numărului în viața socială, în economie și în cultură. La noi, ca de altfel peste tot în lume, suporturile inițiale pentru înregistrarea informației numerice au fost cele din natură, în mod preponderent lemnul, piatra și, mai târziu, hârtia. Ca urmare, strămoșii noștri au recurs și ei, în mod obișnuit, la aceste mijloace, care se constituie în atestări palpabile ale istoriei scrisului pe aceste meleaguri. Au fost, mai întâi, suporturile să le spunem „ancestrale", respectiv *răbojul* și *încrustările pe cherestea*, pe pietrele tombale, pe clopotele de biserică, iar într-o etapă ulterioară o gamă variată de tipuri de documente scrise având ca suport hârtia.

Identificăm, astfel, numere având pentru început transcripții diferite în abecedarele mai vechi (bucoavne) sau mai noi, ca și în manualele școlare sau în tratatele științifice, în calendare, ca și în cărțile bisericești (ceasloave, catehisme), în documentele administrative de tot felul, în pravile (culegeri de legi laice și bisericești), în registrele mai vechi (catastife) sau mai noi, dar și în documente comerciale, în evidențele de vamă, în actele privind dările sau daniile ș.a.

Secole la rând, pentru înregistrarea informațiilor locuitorii de pe meleagurile noastre au folosit *răbojul*. Practic, răbojul este o stinghie de lemn (*rabdos* în greacă înseamnă *băț, baston, vergea*) pe care erau marcate *cantități* (număr de animale, sume de bani, mărfuri etc.).

După încrustarea cantităților, vergeaua era despicată în două, fiecare parte interesată rămânând în posesia unei înregistrări identice cu cealaltă parte. Se realizau, în acest fel, o evidență și un control numerice corecte. Una dintre părți i se dădea – să spunem – ciobanului, lucrătorului, cumpărătorului sau celui impozitat, cealaltă parte stăpânului de oi, feudalului, negustorului, perceptorului. La lichidarea tranzacției, înregistrarea se dovedea corectă dacă încrustările celor două părți ale răbojului se îmbinau perfect. De fapt, populația sătească a Europei a recurs pe tot parcursul Evului Mediu la această modalitate de înregistrare numerică. Cronicarul maghiar Kézai Simon scria, în 1283, că secuii, care vieţuiau tradiţional împreună cu valahii, au împrumutat de la aceştia scrierea pe răboj („Revista pentru istorie, arheologie și filologie", București, an. I, nr. II, 1882, p. 207).

Pe răbojuri, numerele erau reprezentate, cel mai adesea, după cum urmează: pentru 1 – o liniuță verticală, pentru 2 – două liniuțe, pentru 3 – trei liniuțe, pentru 4 – patru liniuțe, pentru 5 – simbolul V, pentru 10 – simbolul X, pentru 15 un X urmat în partea superioară de un V minuscul. Numărul 100 se nota printr-un X majusculă traversat la mijloc de o liniuță orizontală. Pârcălabii (conducători de județe sau de ținuturi având sarcini administrative și militare) notau cu o crestătură lată suma de 5 lei, aceeași crestătură tăiată cu o linie oblică indica suma de 10 lei, iar cu o tăietură verticală simplă se realiza semnul pentru 5 bani.

Muncitorii din saline și plutașii au folosit și un sistem propriu primitiv de notare a sumelor pe care urmau să le încaseze, folosind *crestăturile pe cherestea*, procedeu care va continua până în secolul al XIX-lea. Teodor T. Burada ne-a lăsat un studiu valoros *Despre crestăturile plutașilor pe cherestele și alte semne doveditoare de proprietăți la români* (Iași, 1880). Crestăturile erau făcute cu toporul sau cu barda și continuate cu fierul înroșit, pentru a se realiza așa-numita „danga".

Pe drumul spre adaptarea și impunerea numerației de poziție cu cifre arabe, pe care o folosim și astăzi, pe teritoriul țării noastre au fost în uz: sistemul de numerație latin, sistemul de numerație alfabetic chirilic și sistemul de numerație grecesc. Cele mai vechi urme de numerație scrisă sunt de expresie latină și le identificăm în cartea epocii daco-romane sau străromâne. O piatră tombală descoperită la Romita (azi, jud. Sălaj) și păstrată la Muzeul de Istorie din Cluj, atestă folosirea numerației latine în epoca Daciei Romane. După cum se știe, vestiți cărturari și teologi din veacurile IV-VII, cei mai mulți din Scythia Minor (Dobrogea), cum au fost Ioan Casian Romanul (Ioannes Cassianus), Niceta de Remesiana, Dionysus Exiguus, Ioan de Tomis ș.a., s-au remarcat prin conceperea de scrieri care aparțin curentului de continuitate în diversitate a culturii de extracție romanică, o cultură de limbă latină, care, vreme de 13 veacuri – de la Vergiliu la Dante –, avea să fie limba de cultură a continentului nostru. Prin urmare, înainte de a fi, aici, cultura și cartea în înveliș slavon, cel mai adesea, însă, de extracție bizantină, am avut o cărturărime și o cultură de mai veche tradiție, proprii epocii daco-romane sau străromâne, care au rodit cărți cunoscute și prețuite în Europa timpului.

Literele și numerele latine vor fi folosite, în continuare, concomitent cu alte sisteme de scriere și de numerație. Începând din secolul al XI-lea, latina devine limbă de cult în Transilvania, iar din secolul al XII-lea și limbă de cultură. Apoi, în secolele XVI-XIX, va fi un fenomen distinct cartea în limba latină, mai exact în latina medievală (târzie), fenomen marcat de opera unor învățați cum sunt Nicolaus Olahus, Samuil Micu, Gheorghe Șincai, Petru Maior, Dimitrie Cantemir. Vor fi elaborate gramatici, dicționare, lucrări filosofice, istorice, scrieri în versuri, toate purtând numerație latină. Mai mult sau mai puțin sporadic, alfabetul și numerația latină au pătruns în cancelarii, apoi, în viața economică și comercială (acte contabile, registre de socoteli ale unor moșii, registre administrative, vamale,

fiscale ș.a.). Există atestări ale fenomenului încă din secolele XII-XIII. Prima inscripție cu adresare publică datează din secolul al XIV-lea și figurează pe clopotul bisericii din Leghia (jud. Cluj).

Un fenomen de pregnanță este asimilarea *sistemului de numerație chirilic*. Literele-cifre prezintă valori numerice identice cu cele ale semnelor grecești corespunzătoare. Pentru notarea miilor, baza cifrei era precedată de o codiță cu una sau mai multe liniuțe. Potrivit atestărilor istorice, începând din secolul al X-lea, datarea actelor oficiale se făcea cu ajutorul acestui sistem. Urme de numerație chirilică aflăm de pildă într-o inscripție din localitatea Mircea-Vodă (Dobrogea), notată 6451, adică 943 *(„Inscripția slavă din anul 943"*, în „Studii", an IV, nr. 3 (1953), nr. 3, p. 123-134) sau în cea de la biserica rupestră de la Basarabi (Dobrogea), datată 6451, adică 942 (I. Barnea și V. Bilciurescu, „*Șantierul arheologic Basarabi*, în: „Materiale și cercetări arheologice", an. VI, 1959, p. 541-566). Amintim, apoi, manuscrisul slavon nr. 20 păstrat la Biblioteca Academiei Române, un *Apostol*, care provine din secolul al XIII-lea și care conține multe numere transcrise în sistemul chirilic. Pentru istoria matematicii, deosebit de importante sunt, la rândul lor, calendarele întocmite în vederea stabilirii datei Paștelui, denumite *Pascalii*.

Începând din secolul al XIV-lea, numerele reprezentate cu ajutorul simbolurilor chirilice se regăsesc, frecvent, pe monede, în inscripții din biserici și în cele tombale, ca și în manualele școlare după care au învățat strămoșii noștri.

Pentru ilustrarea numerației chirilice în viața economică, menționăm manuscrisul *Catastih de cisle de țirani de toate ținuturile, de curtiani și vătaji și neamși și popi (*datat 20 februarie 1591), cuprinzând pe cei care plăteau dări din 23 de ținuturi ale Moldovei. El demonstrează atât cunoașterea cifrelor, cât și a operației de adunare a numerelor. Interesantă este folosirea termenului *cislă*, care înseamnă cota-parte ce revenea persoanelor în cauză dintr-o sumă plătită în comun. Termenul provine din slavă, unde înseamnă

număr. Remarcăm, de asemenea, *Catastih amintitor de câte și-au cumpărat casapii* (măcelarii) *din țară, cu asprii lor; și-au pecetluit ca să treacă prin schelea de la Isaccea și prin Focșani, ca să știe*, din 15 mai 1591, unde avem și o operație de înmulțire (*Documente privind istoria României. Veacul XVI*, vol. IV, 1952, p. 26-27).

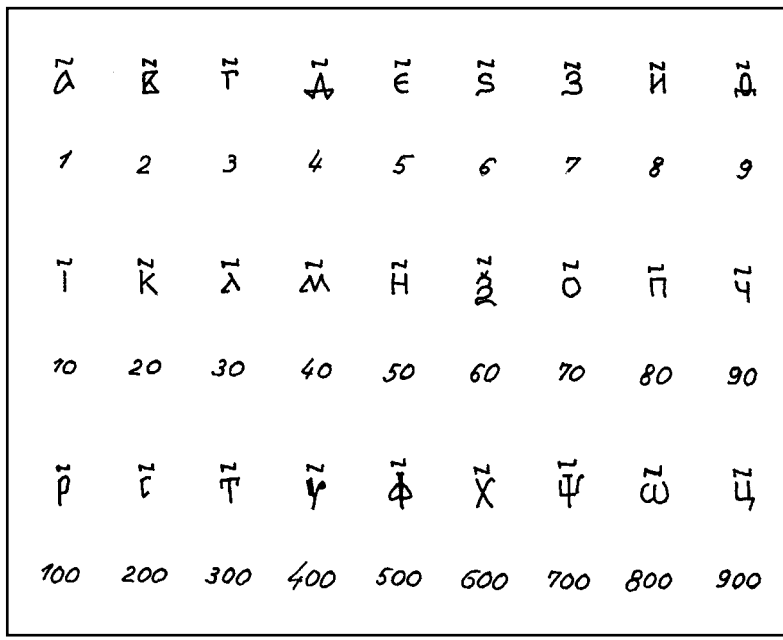


Fig. 39. *Litere-cifre chirilice*
(Reprodus după: Al. Toth, *Op. cit.*)

Tot secolul al XIV-lea, locuitorii de pe meleagurile noastre intră în contact cu alte două sisteme de numerație: cel grecesc și cel arab. Primul are o influență din ce în ce mai pronunțată în Țările Române, datorită mai cu seamă contactelor diplomatice sau ale clerului cu lumea Bizanțului. O atestă numeroase inscripții, printre care una din vremea lui Mircea cel Bătrân, respectiv din 1407, numeroase pietre funerare (începând din 1480), precum și o suită de manuscrise grecești cu caracter didactic. Cifre grecești întâlnim și în Transilvania,

de această dată în secolul al XVI-lea. Johannes Honterus (1498-1549) publică, la Brașov, lucrări aparținând lui Aristotel, Platon, Hesiod, în care numerele sunt notate în sistemul grecesc.

Numerația greacă a pătruns și în texte cu caracter economic. În arhivele organismelor comerciale transilvănene din secolul al XVI-lea se găsesc corespondențe, registre comerciale, procese-verbale și alte acte care conțin informații notate în acest sistem de numerație. Biblioteca Academiei păstrează o *Codică* a companiei grecești din Sibiu din anii 1639-1777, 1705-1814, 1723-1786 etc. (manuscrisele grecești purtând numerele 975, 977 și 978), ca și documente provenind de la visteria statului din Țara Românească și Moldova, ilustrative sub acest raport.

Sistemul de numerație de poziție cu cifre arabe a apărut pe meleagurile noastre începând din secolul al XV-lea (deși documentele evocă folosirea sporadică în Transilvania a numerației arabe încă din secolul al XIV-lea, nu au fost identificate până în prezent urme ale fenomenului la acea epocă). O atestă o gamă largă de mărturii: manuscrise, liste de prețuri, socoteli comerciale, monede, pietre funerare, clopote de biserică. Cea mai veche inscripție cu cifre arabe datează din anul 1407 (biserica din Văleni, județul Cluj).

Firește, procesul de pătrundere și de generalizare a numerației de poziție arabe a fost unul de durată. Mai întâi, noul sistem apare în textele oficiale administrative. Descoperim numere arabe chiar și în textele grecești, precum în *Socoteala pentru goștina* [dare] *a oilor din Moldova cu lista cumpărătorilor* (manuscris grecesc aflat în Arhivele Naționale ale României și reprodus în volumul I al *Colecției de documente Hurmuzaki*) sau în *Catastiful vămilor Moldovei,* din 1765. În sfârșit, în *samile* (dări în bani pe care trebuiau să le achite contribuabilii în comun), se întâlnesc, deseori, cifre scrise în sistemul de numerație arab. De subliniat că toate cursurile de matematică de înalt nivel ținute în secolele XVII-XVIII la Academiile din Iași și București au folosit cifre arabe.

Secolul al XVIII-lea atestă extinderea în toate compartimentele societății a sistemului de numerație arab. Astfel, prima aritmetică, din anul 1777, redactată în limbile română și germană și intitulată *Ducere de mână (către aritmetică) sau socoteala pentru trabă pruncilor românești celor ne[uniți lor] ce se învață la școlele cele [mici],* Beci (Viena), folosește exclusiv cifre arabe. Ea cuprinde numere foarte mari, care merg până la milioane și biliuoane, milioanele fiin notate cu o virgulă în locul exponentului, iar bilionul cu dpouă virgule, de pildă 54 321‘ sau 644 321“ sau 54 321“. Avem apoi, *Introducere către [Aritmetică]. Întâia parte*. În Blaj, 1785, a lui Gheorghe Șincai, care se încheie cu un tabel comparativ al *numerelor illuricești* [chirilice] și țifre hărăpești [arabe], și *Elemente matematicești firești*, Iași, 1798, a lui Amfilohie Hotiniul, care folosește, la rându-i, noul sistem de numerație.

Pe teritoriul țării noastre au circulat, sporadic, și așa-numitele *cifre arabe de est* (variantă folosită în Turcia). Monede, inscripții, texte turcești și sigilii reprezintă documentele moștenite din relațiile Țărilor Române cu hanatele (state conduse de hani) și cu Imperiul Otoman. Am putea exemplifica folosind *Condica moldovenească a lui Alexandru Ipsilanti* (1786-1787), redactată în turco-osmană, apoi *Ceaslovul grecesc și arăbesc* tipărit de Antim Ivireanul, publicat la București, în 1702, și traducerea *Aritmeticii lui Manuil Glyzonios din Hios* (Biblioteca Academiei Române, ms. 1316). De subliniat că *Aritmetica* lui Glyzonios dă un tabel al numerelor de la 1 la 10 în *slove românești, italienești și turcești.*

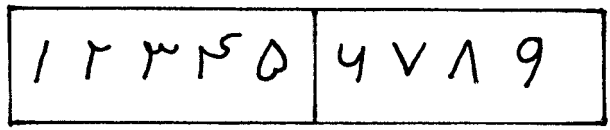


Fig. 40. *Cifre arabe de est*

Este de reținut că, vreme îndelungată, evoluția numerației la români nu a însemnat utilizarea și dezvoltarea unui singur sistem de

înregistrare numerică. În unele perioade, au funcționat, în paralel, pe tot teritoriul țării noastre sau în unele zone, toate cele patru sisteme de numerație prezentate aici, până să se impună numerația de poziție arabă, în secolul al XV-lea. De pildă, numerația chirilică apare la noi pe fondul antecedentelor de numerație latină și coexistă cu aceasta vreme îndelungată. O ilustrează și faptul că, pe parcursul secolului al XV-lea, în Transilvania cifrele arabe erau utilizate fie de sine stătător, fie împreună cu cifrele latine, pentru ca la sfârșitul aceluiași secol să devină preponderente, cu precizarea că în actele de factură economică aveau să predomine cifrele chirilice și în secolul al XVII-lea, și la începutul secolului următor.

De fapt, noi numărăm la fel ca francezii și englezii în privința unităților simple 1, …, 9 și 0. Potrivit profesorului ieșean Ilie Popa, care a întreprins un studiu comparativ al formării numerelor în limba română în raport cu alte limbi (publicat în volumul *Bibliografia matematicii românești*, de Eliza Roman, Editura Academiei, 1972), numerele 11-19 se compun în limba română prin mecanismul diferențial.

Modul de pronunțare a numerelor dintre 11 (unsprezece) și 19 (nouăsprezece), adică unitatea *spre* cifră, ne arată că ne aflăm în fața unei combinații *aditive* diferite de combinația aditivă cea mai obișnuită, care utilizează conjuncția *și* pentru a realiza adunarea. Mecanismul acesta se numește *diferențial.* El se deosebește de cel din latină și din limbile romanice, unde aceste numere se obțin prin mecanismul aditiv, pe când mecanismul diferențial se întâlnește în limbile slave, germanice, în albaneză și în lituaniană. În timp ce în limba română, ca și în celelalte idiomuri romanice, denumirile pentru 21,...29,...,91,...99 se compun prin mecanismul aditiv de forma 20 + 1..., 90 + 9, în limbile slave se folosește mecanismul aditiv de forma 1(20) și 20(1) – în care se omite particula de legătură. Denumirile *o sută*, *o mie* – observă Ilie Popa – nu apar nici în latină, nici în vreo limbă romanică, dar ar putea fi identificată aici o înrudire cu greaca.

NUMERE REMARCABILE

Creația pitagorică

Pasionată de tot ce se referă la număr, Arina este invitată de colegii ei Ștefan și Marius la o „serată matematică“, în care materialul didactic va fi înregistrarea unei discuții a celor doi pe tema numerelor pitagorice. Bineînțeles, Arina acceptă, și întâlnirea debutează într-o ambianță de „sobrietate științifică“.

Pentru a destinde puțin atmosfera, Ștefan îi fredonează Arinei o melodie în care cuvintele încearcă să se adecveze subiectului:

De la Pitagora încoace,
Bieții copilași n-au pace.
Dă-i cu teoreme, leme
Și-o mulțime de probleme!

Pe acest fond, urmează ascultarea benzii.

Marius: Ai dreptate, mi-a mâncat sufletul teorema asta a lui Pitagora. Și mai pretind unii că reprezintă prototipul teoremelor, că este teorema arhetip a matematicii.

Ștefan: Ar fi trebuit stârpită pacostea asta din față, încă în Grecia antică. Dacă s-ar fi pus la vot, toți oamenii cu cap ar fi votat împotrivă. Grigore C. Moisil, celebrul matematician român și pionier al informaticii mondiale, și-a imaginat cum ar fi decurs votarea teoremei lui Pitagora acum vreo 2 500 de ani. În Atena și Boeția, voturile favorabile ar fi fost de 40% și, respectiv, de

50%, iar în Samos, provincia de baștină a lui Pitagora, de numai trei voturi.

Marius: Chiar așa?

Ștefan: În Samos, lumea îl cunoștea pe Pitagora. Cele trei voturi favorabile puteau veni doar din partea lui, a tatălui și a fratelui. Fiul lui, contestatar, ar fi votat împotrivă. Vezi, Doamne, a făcut și el o teoremă. Mare scofală! Apoi, cine știe dacă e a lui. Se zvonește că ar fi „împrumutat-o" din Egipt. Și, în definitiv, teorema asta la ce servește? E adevărată? A măsurat Pitagora toate triunghiurile dreptunghice?

Marius: Dar nu s-a pus la vot, și teorema rezistă de două milenii și jumătate.

Ștefan: Teorema lui Pitagora reprezintă, de fapt, cazul general al funiei cu 12 noduri de care se foloseau arhitecții din Antichitate pentru a trage linii perpendiculare, adică pentru a desena unghiuri drepte pe terenurile pe care urma să fie ridicate construcții. Ei mânuiau doar un caz particular al triunghiurilor dreptunghice, acela în care laturile triunghiului sunt egale cu 3, 4 și 5, căci $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Marius: Este drept că teorema lui Pitagora, care spune că în orice triunghi dreptunghic suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei, a fost cunoscută pentru cazuri numerice particulare de către sumerieni cu două milenii înainte de Hristos. Din secolul al XVIII-lea î.e.n., s-a păstrat o impresionantă serie de asemenea relații, consemnate pe celebra tăbliță babiloniană

Pitagora

Plimpton 322, care a servit la rezolvarea unor probleme de geometrie și de algebră. Textele vechi indiene și cele de ritual, precum și aforismele despre sfoara zidarului cuprindeau, de asemenea, reguli tehnice de construcție bazate pe teorema lui Pitagora. Scrieri ale chinezilor menționează, la rândul lor, utilitatea și valoarea acestei teoreme. La sfârșitul secolului al II-lea e.n., Dya Chou Pei Suan Țing (Zhou Bei Suan Jing), în *Tratatul matematic despre gnomon,* pomenește despre un triunghi dreptunghic cu laturile 3, 4 și 5, iar Ciao Țiung Țing (Zhao Jun Jing) dă o demonstrație originală a teoremei lui Pitagora.

Ștefan: Dacă se cunoșteau atâtea lucruri înainte de Pitagora, înseamnă că el nu a avut nici un merit! A fost un plagiator!

Marius: Nu, Ștefane! Trebuie să recunoaștem că Pitagora și discipolii săi – adică cei care au demonstrat pentru prima oară o teoremă – au fost geniali. Să ținem seama că o teoremă, o propoziție sau un enunț odată demonstrate au valoare eternă. Nu mai trebuie să măsurăm toate triunghiurile dreptunghice din lume pentru a ne convinge de adevărul relației afirmate. Demonstrarea teoremei lui Pitagora arată forța gândirii omenești față de experiență, ușurează efortul intelectual, economisește timpul, ne ferește de erori.

Întorcându-se acasă, Arina meditează. E drept că Pitagora a asimiliat din cultura egipteană și din cea babiloniană și că a pus bazele unei confrerii secrete, dar lui îi datorăm demonstrația matematică. A exagerat adorând numărul natural și susținând că „orice lucru", chiar și „Dumnezeu", este număr! Ce sfârșit cumplit a avut! A murit mistuit de flăcările propriei școli, incendiate de fanatici politici și religioși, care ridicaseră mulțimile împotriva învățăturii propovăduite de matematicianul filosof. Aceștia i-au distrus ființa fizică, dar

geniul său matematic a dăinuit. Îi datorăm lui Pitagora și școlii lui cristalizarea unei geometrii raționale și demonstrative, a unei aritmetici teoretice având ca obiect proprietățile generale ale numerelor, a unei astronomii diferite foarte puțin de o geometrie speculativă, în sfârșit a unei muzici care tratează la modul abstract și matematic intervalele și acordurile.

Numere *p-adice*

Arina consultă, la bibliotecă, ultimele noutăți editoriale despre numerele *p-adice.* Gabi, colega ei, răsfoiește, mirată, titlurile de pe masă.

Arina: Află, dragă, că numerele *p-adice* ocupă astăzi un loc important în universul numerelor!

Gabi: Ce reprezintă această vocabulă, despre care n-a auzit mai nimeni și care sună cam barbar?

Arina: *Numerele p-adice* sunt o categorie de numere abstracte, greu de reprezentat, descoperite pe la începutul secolului trecut de către matematicianul german Kurt Hensen (1861-1941). Mult mai tinere decât celelalte categorii de numere cu care elevii s-au deprins, numerele *p-adice* sunt entități care au darul să-i ajute pe cei ce se îndeletnicesc cu teoria numerelor să construiască instrumente de lucru foarte puternice și chiar să alimenteze speculațiile unor fizicieni asupra naturii spațiului și timpului.

Gabi: Ce statut au aceste numere în matematică?

Arina: Cu toate că nu sunt deloc intuitive, *numerele p-adice* au dobândit un statut central în mai multe ramuri ale matematicii, ca, de pildă, în teoria algebrică a numerelor (studiul rădăcinilor polinoamelor cu coeficienți raționali) și în geometria algebrică (studiul soluțiilor ecuațiilor polinomiale cu mai multe variabile). Și încă ceva: din

raţiuni de comoditate, rigoare, coerenţă etc., matematicienii doreau să completeze corpul numerelor raţionale în aşa fel încât să includă numere care să fie, asemenea numerelor iraţionale, limitele unor şiruri de numere raţionale.

Gabi: Ia-o mai încet. Explică-mi ce e cu diferitele tipuri de numere.

Arina: S-o luăm cu numerele raţionale. Ele sunt de forma $\pm \frac{m}{n}$, unde *m* şi *n* sunt numere naturale (1, 2, 3…), iar *n* este diferit de zero. Numerele raţionale pot fi scrise şi ca numere zecimale. Astfel, $- = 0{,}77777\ldots$, $- = 0{,}555\ldots.$, $\frac{2}{3} = 0{,}66\ \ldots$ etc.

Numărul iraţional (pozitiv sau negativ) poate fi reprezentat cu ajutorul unei fracţii zecimale neperiodice formate dintr-o infinitate de cifre care nu se repetă periodic; de exemplu, $\pi = 3{,}14159265\ldots.$ sau $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Gabi: Asta ştiam şi eu.

Arina: Stai să vezi. Distanţa dintre două numere, cum sunt cele pe care le mânuim în mod curent, se exprimă cu ajutorul diferenţei dintre valorile absolute ale punctelor care au drept coordonate numerele respective. Dacă A este egal cu 2 şi B este egal cu 5, distanţa AB = 5 – 2 = 3; dacă ieri au fost –7° şi azi sunt +3°, distanţa de temperatură este de 10°C. Adică, pentru înţelegerea numerelor se foloseşte noţiunea de *distanţă.* Şi acum surpriza, Gabi dragă. Când e vorba de *numere p-adice*, se pot defini mai multe distanţe faţă de aceleaşi punct.

Gabi: Cum adică?

Arina: În lumea acestor numere nu mai funcționează *distanța* cu care lumea este obișnuită, distanța geometrică intuitivă.

Gabi: Asta trebuie să-mi ilustrezi.

Arina: Pentru noțiunea de distanță a *numerelor p-adice* se folosește un arbore genealogic, în care se definește distanța dintre doi verișori ca fiind numărul ramurilor ce trebuie parcurse pentru a se ajunge de la unul la celălalt, trecând printr-un strămoș comun. În aceste condiții, este ușor de constatat că distanța dintre doi verișori din aceeași generație este cel mult egală cu cea mai mare distanță care îi separă pe cei doi verișori de un al treilea, aparținând aceleași generații cu cei doi.

Gabi: Totuși, nu-mi dau seama cum se ajunge la aceste numere.

Arina: Nu e ușor de realizat acest lucru, dar pot fi încercate unele analogii.

Gabi: Analogii?

Arina: *Numerele p-adice* au fost obținute de Hensel cu ajutorul unor dezvoltări oarecum asemănătoare celor pe care le facem noi pe numere obișnuite. Îți dau un exemplu: să luăm un număr oarecare și să ne jucăm cu el. Atenție, e un *joc,* nu o *joacă*.

Luăm: 12 548,29 = 1 x 10 000 + 2 x 1 000 + 5 x 100 + 4 x 10 + 8 + $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ = 1 x 10^4 + 2 x 10^3 + 5 x 10^2+ 4 x 10 + 8 x 10^0 + 2 x 10^{-1} + 9 x 10^{-2}. În acest mod, *numerele p-adice* pot arăta în felul următor: $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1}$ + …+ a_0+$b_1 p^{-1}$ + +$b_2 p^{-2}$+ …, unde n este un număr oarecare cuprins între 0 și p.

Gabi: Dă-mi o imagine mai „umanizată“, Arina dragă.

Arina: Uite, ne putem imagina numerele *p-adice* ca pe frunzele unui arbore ale cărui crengi se ramifică la infinit.

Gabi: Și la ce servesc numerele astea?

Arina: În primul rând, de pe urma lor profită matematicienii. *Numerele p-adice* pot fi folosite fie considerând o singură distanță, fie făcând să intervină simultan toate distanțele care se pot defini pe numere naturale (atât distanțele *p-adice*, cât și distanțele *clasice*). Combinând aceste două moduri de abordare, pot fi obținute rezultate care se exprimă în manieră clasică, adică al căror enunț nu face să intervină numerele *p-adice*. Numerele acestea au făcut senzație în matematică atunci când și-au arătat utilitatea în demonstrarea celebrei teoreme a lui Fermat, căreia nu i se găsise rezolvarea, în ciuda a peste trei secole de eforturi.

Gabi: Și cine a făcut isprava asta?

Arina: Andrew Wiles. El a folosit *numerele p-adice* în mai multe părți ale raționamentului său, cu toate că enunțul teoremei se referă numai la numere întregi obișnuite. Ecuația lui Fermat face parte din categoria ecuațiilor diofantice. Îți spun imediat ce sunt aceste ecuații.

Gabi: Se vorbește de adnotările lui Fermat la opera lui Diofant

Arina: Matematicianul grec Diofant avea pasiunea de a rezolva în numere întregi ecuații al căror prim membru erau polinoame cu coeficienți întregi.

Gabi: Dă-mi, te rog, un exemplu.

Arina: Cele mai simple dintre aceste ecuații, ecuațiile de gradul I, sunt de forma $ax + by = c$, unde a, b și c sunt întregi cunoscuți, iar x, y întregi care trebuie să fie determinați. S-a demonstrat că pentru ca o ecuație diofantică să aibă o soluție întreagă este necesar, dar nu și suficient, ca ea să aibă o soluție *p-adică*, în anumite condiții. Folosirea *numerelor p-adice* a fost extinsă, de asemenea, la funcții.

STATUTUL DE NUMĂR SE OBȚINE GREU

Există numere iraționale?

După ore, Arina și Oana pleacă spre librărie. Fără să știe când, discuția lor alunecă pe terenul numerelor.

Oana: Am urmărit confruntarea diferitelor categorii de numere pentru obținerea statutului de număr.

Arina: Și aici e nevoie de confruntare?

Oana: Și încă ce nevoie. Dacă numerelor naturale li s-a recunoscut dintotdeauna identitatea, nu același lucru s-a întâmplat cu celelalte tipuri de numere. Atât Thales, cât și Pitagora, atât Platon, cât și Aristotel, toți învățații greci atribuiau calitatea de număr doar numerelor naturale. Nici măcar numerelor fracționare nu le acordau statut de număr. Acestea reprezentau pentru ei *măsura lungimii unui segment* construit cu rigla și compasul, cu ajutorul unui alt segment–unitate, cele două segmente fiind comensurabile între ele. De aceea, li se spunea și *numere comensurabile*. Pentru ei, numerele fracționare erau doar mărimi. Or, multe popoare din Vechime, precum hindușii sau chinezii, au operat și cu alte tipuri de numere, atunci când le erau necesare în rezolvarea unor probleme, fără să se preocupe de natura numerelor.

Arina: Într-adevăr, grecii nu recunoșteau statutul de număr decât numerelor întregi pozitive, de fapt numerelor

naturale finite. Pentru pitagoricieni ele constituiau „principiul adevărului“, capabil să dezvăluie realitatea. Observând că numerele care caracterizează figurile intrinsece armonioase, cum este, de exemplu, cubul, apar și în acordurile muzicale, au construit scenariul armoniei universale.

Oana: Cubul are toate laturile și toate fețele egale, e frumos, dar nu-mi produce aceeași emoție ca o simfonie…

Arina: Două sunt elementele care concură la plăcerea de a face matematică: esteticul și ludicul. Uite cum gândeau pitagoricienii. Spune-mi, Oana, câte muchii, fețe și vârfuri are cubul?

Oana: 12 muchii, 6 fețe și 8 vârfuri.

Arina: Media armonică a numerelor 12 și 6 este 8. Știi definiția? Media armonică a mai multor numere este reprezentată prin numărul al cărui invers este egal cu media aritmetică a inverselor numerelor date. Să aplici formula când ajungi acasă și o să vezi că 8 e media armonică a lui 12 și 6.

Media armonică a mărimilor a și b este:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{2ab}{a+b}$$

Oana: Media aritmetică a lui a și b este $\frac{a+b}{2}$; inversul lui a este $\frac{1}{a}$; iar inversul lui b este $\frac{1}{b}$;

media aritmetică a acestor două numere $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ este egală cu suma lor împărțită la 2 (căci am de-a face cu două numere, deci $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$).

Să facem împărțirea:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\frac{2}{1}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Acum, ținând seama de definiție, să scriu inversul acestui ultim număr, adică 1 supra acest număr.

Obțin: $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, deci ceea ce indică definiția mediei armonice.

Dacă numerele sunt 12 și 6, să facem calculele pentru obținerea mediei lor armonice:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1+2}{12}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{12}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=1:\frac{1}{8}=\frac{1}{1}\times\frac{8}{1}=8$$

Am găsit, deci, că media armonică este 8.

Arina: Impactul acestor trei numere – 12, 6 și 8 – apare clar și în muzică. Dacă facem să-i corespundă numărul 6 în loc de 1 primei note a octavei, 8 va corespunde cvartei, iar 12 octavei. Fermecați de această corespondență dintre numere și sunete, pitagoricienii au tras concluzia că armonia geometrică și cea muzicală sunt impuse de aceleași legi ale armoniei. Euforici, au extrapolat descoperirea lor la existența „armoniei universale", lege care regizează cu titlu egal și unește într-o sinteză omogenă diferite ordine ale realității de o așa simplicitate încât e adaptabilă și spiritului.

Oana: „Armonia universală", care se reflectă și în armonia ideilor, a dominat multă vreme gândirea filosofilor. Dar să revin la întrebarea ta. Și grecii au aflat despre alte categorii de numere, însă pentru ei erau doar mărimi sau simboluri.

Arina: Și ce scandal a fost la apariția numărului irațional.

Oana: Criza aritmeticii grecești a constat în incapacitatea ei de a explica valoarea diagonalei unui pătrat cu latura 1.

Arina: Oricine știe că dacă *a* și *b* sunt numere obișnuite (naturale), fracția $\frac{a}{b}$ este un număr rațional, iar dacă nu există numere întregi *m, n* astfel încât un număr N să poată fi exprimat prin $\frac{m}{n}$, atunci se spune că N este irațional.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{\ }$, $\sqrt{6}$ sunt numere iraționale. Dacă vrem să exprimăm un număr irațional în numerația zecimală, cifrele de după virgulă se vor succeda fără nici o regularitate. Nu va apărea aici o perioadă care să se repete, ca în reprezentarea zecimală a numerelor raționale (de exemplu $\frac{13}{11}$ se reprezintă prin 1,181818..., unde perioada 18 se repetă la infinit). În aceste condiții, dacă reprezentarea nu urmează nici o lege, cum putem defini zecimalele iraționalelor, cum putem opera cu ele?

Oana: Scandalul a pornit de la valoarea diagonalei unui pătrat cu latură 1, adică de la $\sqrt{\ }$. Diagonala împarte pătratul în două triunghiuri dreptunghice egale cu laturile 1. Or, potrivit teoremei lui Pitagora, pătratul diagonalei (ipotenuzei) este egal cu suma pătratelor celor două catete, adică a celor două laturi, $1^2+1^2 = 2$, iar diagonala este egală cu $\sqrt{2}$. Grecii puteau găsi diagonala cu ajutorul riglei și al compasului, dar această cantitate nu corespundea concepției lor despre număr; de aceea, au denumit iraționalele *alogon*, adică fără rațiunea de a exista, care nu pot fi formulate, ne-logice (*arreton*).

Arina: Grecii chiar se rușinau cu aceste entități lipsite de rațiunea de a exista; de aceea, pitagoricienii, care au descoperit această proprietate a diagonalei, au încercat s-o ascundă de ochii lumii. În zadar! S-a aflat și a ieșit vorba: „*Cine nu știe că diagonala unui pătrat este incomensurabilă cu latura lui nu e demn de numele de om*“. Îmi permiți să-ți spun câte ceva despre matematicianul german Richard Dedekind (1831-1916), care a jucat un rol de seamă în viața numerelor iraționale.

Oana: Încă nu, deoarece trebuie să adaug câte ceva despre preocupările grecilor pentru iraționale.

Arina: Te ascult.

Oana: Potrivit lui Platon (427-348/347 î.e.n), matematicianul grec Theodoros din Cirene (sec. V-IV î.e.n), luând ca exemplu numerele 1, 2, 3..., 17, a demonstrat că radicalii din 1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 reprezintă numere iraționale, iar radicalii din 4, 9 și 16 reprezintă numere raționale, 4, 9 și 16 fiind pătrate perfecte ($4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$). Deci, încă pe vremea lui Platon se făcea distincție între două grupuri de numere, cele ai căror radicali sunt numere raționale și cele ai căror radicali sunt numere iraționale. Platon a acordat o deosebită atenție acestei probleme, incitat de caracterul enigmatic al naturii iraționalului matematic, care putea fi util în detectarea mecanismului cunoașterii. Stârnește interes dialogul lui Platon intitulat *Theaitetos*, care argumentează valoarea de model a cercetării iraționalelor în vederea atingerii esenței cunoașterii.

Arina: Mă surprinzi, Oana, ai început să citești filosofie?

Oana: Da, și trebuie să-ți mărturisesc că o fac cu multă plăcere. În acest dialog, Theaitetos, elevul lui Theodoros, are rolul de a expune, a explica și a generaliza

rezultatele maestrului său. De altfel, unele dintre sursele de inspirație ale lui Euclid în clasificarea iraționalelor le datorează discipolului lui Theodoros. Mai tânărul contemporan al lui Platon, astronomul și matematicianul grec Eudoxos din Knidos (c. 406-c. 355 î.e.n.) a contribuit substanțial la înțelegerea iraționalelor.

Arina: Și ce a făcut Eudoxos pentru iraționale?

Oana: Îți citez definiția dată de el *raporturilor egale,* definiție care a permis matematicienilor să folosească numerele iraționale cu egală precizie față de numerele raționale: „*Se zice că prima dintre patru mărimi are același raport cu cea de a doua, cea de a treia cu cea de a patra, când, luând orice alți multipli ai primei și ai celei de-a treia, multiplul primei este superior, egal sau inferior multiplului celei de a doua, după cum multiplul celei de a treia este superior, egal sau inferior multiplului celei de a patra"* (Reprodus după: E.T. Bell, *Les grands mathématiciens*, Paris, Payot, 1950, p. 139). De fapt, Eudoxos a fixat punctul de plecare al unei teorii moderne a iraționalelor.

Arina: Practic, definiția lui Dedekind – a egalității a două numere raționale sau iraționale – e identică cu cea a lui Eudoxos. Dedekind s-a străduit să precizeze noțiunea de număr irațional. Esențială în teoria lui este ideea de *tăietură* care separă toate numerele raționale în două clase, una superioară și alta inferioară, în așa fel încât orice număr dintr-o clasă inferioară este mai mic decât orice număr dintr-o clasă superioară. $\sqrt{2}$ este definit prin tăietura a cărei clasă superioară conține toate numerele raționale pozitive ale căror pătrate sunt mai mari decât 2 și a cărei clasă inferioară conține toate celelalte numere raționale ale căror pătrate sunt mai mici decât 2.

Numere negative – numere fictive

Oana: Crezi că soarta numerelor negative a fost mai fericită?

Arina: Și ele au avut de înfruntat prejudecățile gândirii grecești în privința statuării lor ca număr. Multă vreme, matematicienii s-au codit să le recunoască drept cetățeni cu drepturi depline în familia numerelor. De pildă, Gerolamo Cardano (1501-1576), cunoscut matematician, medic și filosof italian din epoca Renașterii, de numele căruia se leagă rezolvarea ecuațiilor algebrice de gradul III (care-i poartă numele), considera numerele negative drept *numere fictive* și le-a botezat *numere cu minus*. La rândul lui, matematicianul francez François Viète le-a negat existența.

Oana: Nu mă așteptam ca Viète, care este unul dintre fondatorii algebrei moderne, cel care a introdus literele pentru a simboliza cantitățile necunoscute, tocmai acest matematician luminat să fie așa de încuiat.

Arina: Asta-i istoria! Numărul negativ a înregistrat o victorie datorită unui matematician subtil, olandezul Albert Girard (1595-1632). În 1629, el a publicat, la Amsterdam, *Invenția nouă în algebră*, arătând că negativul în geometrie înseamnă mersul înapoi, iar pozitivul, mersul înainte. Cu René Descartes, numerele negative și-au dobândit pe deplin statutul de numere. Orice școlar știe că pe o dreaptă orientată poți figura, pornind din origine într-un sens, numerele pozitive, iar în sens contrar numerele negative.

Oana: Numerele negative l-au preocupat și pe Immanuel Kant (1724-1804). În 1763, filosoful german a publicat un *Eseu asupra numerelor negative,* în care arăta că, dacă noi considerăm o serie de mărimi ce descresc plecând de la o cantitate pozitivă oarecare, obținem mărimea negativă printr-un demers linear al spiritului sau, cum va spune în 1791, printr-o simplă degradare a luminii. Dar noi nu aveam atunci decât o reprezentare statică a mărimii negative. Or, dacă mărimile negative intervin într-un calcul pentru a modifica rezultatul total, înseamnă că ele reprezintă altceva decât o absență de mărime pozitivă, înseamnă că ele au o eficacitate de opoziție, că exercită o acțiune pozitivă, după cum un ecran este un obstacol pozitiv în transmiterea luminii.

Immanuel Kant

Immanuel Kant mai subliniază că este ridicol să se asimileze diferența dintre creditor și debitor ca o simplă opoziție logică, deoarece, în realitate, este vorba despre conflictul a două realități concrete, care acționează în sens contrar, precum o fac atracția și respingerea. În acest fel, Kant arată că aritmetica nu mai este știința numerelor ca obiecte ideale, ci știința *lucrurilor numărate* și tocmai natura relațiilor dintre lucrurile înseși decide relația dintre numere.

Numărul *i* – „un amfibiu între existență și neant“

După ce răsfoiesc noutățile din librărie, Oana și Arina se întorc acasă. Pe drum, iau în vizor peripețiile prin care a trecut celebrul *i* pentru a se impune ca număr.

Arina: Când a apărut *i* pe scenă?

Oana: Am citit că Bhaskara Acaria (c.1114-c.1178), matematician indian de renume, vorbește de $\sqrt{-1}$. Cu toate că lucra cu rădăcina pătrată a unui număr negativ, el nu credea în existența acestuia, fiind convins că *„un număr negativ nu poate fi niciodată un pătrat perfect“*. Pentru Cardano, despre care am mai vorbit, numerele complexe aveau doar valoare formală. Speriat de apariția rădăcinilor din numere negative, Cardano le-a botezat *imposibile* sau *sofisticate*, fiindcă nu au o existență reală, ținând seama că pătratele tuturor numerelor sunt numere pozitive.

Arina: Cam multă patimă în jurul lui *i*.

Oana: Cu timpul, patimile s-au mai domolit. Matematicienii care i-au urmat lui Cardano nu s-au mai lăsat torturați de numerele complexe și le-au utilizat.

Arina: Care anume?

Oana: Au fost mai mulți. De exemplu, italianul Raffaele Bombelli (1526-1572) privește rădăcina pătrată din –1 ca pe *„un număr care ascultă de regulile de operații ale numerelor adevărate*“. Bombelli a fost cel care a expus regulile adunării și înmulțirii numerelor complexe. Lui Albert Girard îi datorăm introducerea simbolului $\sqrt{-1}$ și, în general, radicalul oricărui număr negativ, $\sqrt{-n}$ (n = 1, 2, 3 …).

Arina: Cine l-a denumit pe *i* „imaginar“?

Oana: Descartes. Atunci când a determinat punctele de intersecție ale unei parabole cu un cerc, cărora le-a zis

imaginare. Mai târziu, matematicianul englez John Wallis le-a dat o interpretare vectorială. Ei, și acum intră în scenă Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), un mare filosof și un mare matematician. Visul lui de o viață a fost construirea unei „caracteristici universale", un fel de algebră logică ce ar fi permis înlocuirea tuturor raționamentelor prin calcule, și elaborarea unei *enciclopedii demonstrative,* în care toate adevărurile cunoscute să fie grupate potrivit înlănțuirii lor deductive. Leibniz este un precursor al logicii matematice și al calculatorului, iar alături de Newton unul dintre creatorii calculului diferențial și integral. Definițiile și simbolurile introduse de Leibniz se utilizează și azi în matematică.

Arina: Ce înseamnă că Leibniz l-a privit pe *i* ca pe „*un amfibiu între existență și neant*"?

Oana: Știu aproape pe de rost ceea ce a spus Leibniz. Ascultă: *Din gelozie pe minunata lor multiplicitate, natura lucrurilor, mama multiplicităților veșnice sau mai degrabă spiritul divin, n-ar admite ca totul să fie subsumat unei singure specii. De aceea, el a găsit un refugiu rafinat și miraculos, acea minune a analizei, în monstrul lumii ideale, care este aproape ca un amfibiu între existență și neant, numit de noi rădăcină imaginară*.

Referitor la numărul *i*, Abraham de Moivre (1667-1754), matematician britanic de origine franceză, a arătat că orice număr real are n rădăcini de ordinul 1, dintre care cel puțin două sunt reale, iar restul – complexe. D'Alembert s-a implicat și el în impunerea numerelor complexe.

Arina: Da. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), matematician și filosof francez, a elaborat teorema fundamentală a

algebrei (Teorema lui d'Alembert), teoria ecuațiilor, și a dat primul exemplu de funcție de variabilă complexă.

Oana: O să-ți bag o mică strâmbă. Nu te încrunta! În legătură cu teorema fundamentală a algebrei, îți precizez că Albert Girard a afirmat, înaintea lui d'Alembert, că orice ecuație algebrică de gradul n admite n rădăcini reale sau aparente, înțelegând prin aparente numerele complexe de forma $a + b\sqrt{-1}$.

Jean Le Rond d'Alembert

Arina: Cunosc afirmația lui Girard; i-a chinuit două secole pe matematicienii până la d'Alembert. Să nu uităm că d'Alembert, în lucrarea sa *Réflexions sur la cause générale des vents,* publicată în 1747, a făcut un pas hotărâtor pentru înțelegerea naturii lui *i*, afirmând că orice funcție de unul sau mai multe numere poate fi pusă totdeauna sub forma $a + ib$.

Oana: În acest fel, a stimulat interesul lumii matematicienilor pentru stabilirea acestei categorii de numere și a justificat legitimitatea operațiilor cu numere complexe. Aici trebuie subliniat impactul matematicianului elvețian Leonhard Euler. Deși nevăzător încă din 1735, a lucrat până în ultima clipă a vieții. Prin amploarea și prin importanța operei sale (900 de lucrări), Euler rămâne, incontestabil, cel mai fecund autor al secolului al XVIII-lea în domeniul științelor matematice. Deși a folosit numerele imaginare sau complexe, el nu le-a acordat statut de număr. În cartea sa de algebră din 1770 avea să scrie că *„Toate expresiile de forma*

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ *nu sunt nici nimic, nici mai mari și nici mai mici decât nimic, sunt imaginare și imposibile*". Începând din 1777, Euler cercetează funcțiile de variabilă complexă și înlocuiește prin *i* (inițiala cuvântului imaginar) simbolul $\sqrt{-1}$ folosit de Leibniz.

Arina: Observ că *i* are o istorie îndelungată.

Oana: Stai să vezi. Douăzeci de ani mai târziu, în 1797, matematicianul danez Gaspar Wessel (1745-1818) constată că numerele complexe pot fi privite ca vectori situați în planul complex. În acest fel, a fost stabilită identitatea dintre vectorul *i* și vectorul obținut prin rotirea vectorului unitate, în sens direct (invers decât mersul acelor de ceasornic), în jurul originii 0 de un unghi egal cu 90. Și astfel relația $i^2 = -1$ a dobândit un sens geometric.

Arina: Presimt că ajungi la Gauss.

Oana: Ai ghicit. O dată cu apariția *teoriei resturilor bipătratice* a lui Carl Friedrich Gauss, existența numerelor complexe nu a mai fost pusă la îndoială. Acest gigant al matematicii a conceput aproape toate descoperirile sale fundamentale din domeniul matematicii între 14 și 17 ani.

La 16 ani, descoperea o altă geometrie – cea neeuclidiană, hiperbolică –, iar la 17 ani se lansa în hățișul numerelor, pe care avea să-l transforme în noua teorie a numerelor. Cercetările matematicianului german în domeniul aritmeticii superioare, începute în timp ce urma gimnaziul, l-au făcut nemuritor. Prin capacitatea sa de calcul, Gauss a transformat numerele în piese de laborator, descoperind cu ajutorul inducției teoreme generale a căror demonstrare cere mari eforturi.

Arina: Adică?

Oana: Printre bijuteriile gândirii sale matematice, se include *theorema aureum*, la care Euler ajunsese prin inducție

și care este cunoscută sub numele de *legea de reciprocitate*. Gauss a pornit de la întrebarea: câte cifre sunt în perioada unei fracții periodice? Pentru a se dumiri, a calculat mai întâi toate fracțiile $-, \frac{1}{2}, -, \ldots \frac{1}{1000}$.

Nu a aflat răspunsul, dar a descoperit ceva mult mai important, așa-numita *lege a reciprocității resturilor pătratice,* potrivit căreia două numere dau același rest dacă sunt împărțite prin același număr sau modul. La 19 ani, reușește să demonstreze, acolo unde Euler și Lagrange eșuaseră, că există reciprocitate între perechile de congruențe $x^2 = q \pmod p$ și $x^2 = p \pmod q$ atunci când p și q sunt numere prime. De altfel, lui Gauss i se datorează ideea de congruență. Se știe că dacă $a - b$ sau $b - a$ se divid cu m (a, b, m fiind numere), atunci se poate scrie că $a = b \pmod m$ (a este congruent cu b modulo m). Cu trecerea anilor, Gauss a dat încă șase demonstrații acestei teoreme, pe care o considera „o bijuterie matematică" și pe care a denumit-o *theorema aureum*. Lucrarea *Disquisitiones mathematicae,* apărută în 1801 – capodopera „Prințului matematicii", cum este denumit Gauss – îl impune ca maestru al teoriei numerelor, căreia îi deschide o nouă eră.

Arina: La un moment dat, Gauss evocă o așa-numită „obscuritate misterioasă". Despre ce poate fi vorba?

Oana: Ca să lămurim chestiunea asta trebuie să o iau cam de departe. Deocamdată, îți reproduc într-o traducere liberă pledoaria lui Gauss din 1831, pe care îmi face plăcere să cred că o țin bine minte: „*Transpunerea teoriei resturilor bipătratice în domeniul numerelor complexe ar putea să pară unora, familiarizați cu natura*

mărimilor imaginare și care au idei false despre acestea, nepotrivită și nenaturală". Nimic n-ar fi mai neîntemeiat. Din contră, aritmetica numerelor complexe este capabilă de cea mai mare intuitivitate.

Arina: Ce argumente aduce Gauss pentru a convinge asupra intuitivității numerelor complexe?

Oana: Gauss susține că, așa cum pentru reprezentarea numerelor negative este de ajuns prelungirea nelimitată a șirului numerelor întregi absolute (pozitive) în partea opusă punctului inițial, tot asemenea, într-un plan, se poate imagina un sistem de puncte egal distanțate între ele, care împart planul în pătrate egale și servesc la reprezentarea numerelor complexe.

Carl Friedrich Gauss

Arina: Gauss vrea să ne explice că numerele complexe reprezintă o extindere în materie de numere.

Oana: El arată că, inițial, pornindu-se de la conceptul numerelor întregi absolute, s-au adăugat numerele fracționare; apoi s-au adăugat, la cele raționale, cele iraționale; la cele pozitive, cele negative; la cele reale, cele imaginare. Această extindere – subliniază Gauss – s-a făcut, la început cu pași plini de ezitare. Primii algebriști numeau false rădăcinile negative ale ecuațiilor și ele erau chiar false atunci când problema la care se referă apărea astfel formulată încât specificul mărimii căutate nu admitea ceva opus. Însă pe cât de puțin criticabilă este admiterea numerelor fracționare în aritmetica

generală, deși există multe lucruri numărabile în care numărul fracționar nu are sens, tot așa de puțin se pot contesta numerelor negative drepturi egale cu cele pozitive pe motivul că nenumărate lucruri nu admit un opus. Realitatea numerelor negative e suficient de justificată, pentru că ele găsesc un substrat adecvat în nenumărate alte cazuri. În această privință – susține Gauss –, suntem de multă vreme lămuriți: însă numerele imaginare, opuse celor reale – numite impropriu odinioară, pe ici, pe colo, dar și acum, *imposibile*, apar mai mult ca un joc de semne golit de conținut în sine, căruia i se contestă total un substrat inteligibil. Fără a voi, totuși, să se disprețuiască bogatul tribut pe care-l plătește până la urmă acest joc de semne tezaurului mărimilor reale. Dacă până acum acest obiect a fost considerat dintr-un punct de vedere fals și s-a găsit aici o obscuritate misterioasă, acest lucru trebuie atribuit în cea mai mare măsură denumirii puțin convenabile. Dacă +1, –1, $\sqrt{-1}$ nu s-ar fi numit unitate pozitivă, negativă, imaginară (sau chiar imposibilă), ci, de pildă, unitate directă, inversă, laterală, cu greu s-ar mai fi putut vorbi de o astfel de obscuritate.

Numere transcendente

Arina: Și despre numerele transcendente ce se cunoaște?

Oana: Cât privește atestarea numerelor transcendente, aflăm din cartea doamnei Câmpan, *Povestea numărului* , o informație revelatoare despre modul în care au fost recunoscute primele numere transcendente, e și π.

Matematicianul francez Joseph Liouville (1809-1882) a pus în evidență pentru prima oară aceste numere și a arătat că ele sunt în număr infinit, iar matematicianul german Georg Cantor (1845-1918) – unul dintre creatorii teoriei mulțimilor – a observat că această categorie de numere este cu mult mai mare decât a numerelor algebrice. Pentru multe numere remarcabile nu se știe cum trebuie demonstrată transcendența lor (de exemplu: $e + \pi$, π^e, C etc.). Numărul transcendent cel mai ușor de memorat este cel al lui Kurt Mahler: 0,12345678910111213 14... Ulterior, în 1934, matematicianul rus A.O. Gelfond (1906-1968) a prezentat un procedeu comod de construire a numerelor transcendente, demonstrând, concomitent, o propoziție enunțată încă de Euler (Teorema lui Gelfond-Schneider).

Arina: Care anume?

Oana: Este vorba despre cea de a 7-a problemă din celebra listă a lui Hilbert din 1900, și anume: pentru orice număr algebric α diferit de 0 și 1 și orice număr transcendental β, cel puțin una dintre expresiile α^{β}, α^{β^2}, α^{β^3}este transcendentală. Acest rezultat este valabil pentru orice β irațional având în vedere teorema Gelfond-Schneider. Teorema arată, de asemenea, că pentru orice β real irațional funcția x^{β} nu poate asuma valori algebrice la mai mult decât două valori integrale consecutive pentru $x \geq 2$.

Metodele de determinare a transcendenței numerelor sunt extrem de tehnice: demonstrații prin absurd, majorări și micșorări. Găsim astfel de metode atât în volumul *Transcendental and Algebric Numbers,* al lui A.O. Gelfond, apărut la New York, în 1960, cât și

în cel al lui A. Baker, apărut cinci ani mai târziu, la Cambridge University Press, intitulat: *Transcendental Number Theory.*

Numărul care nu-și dezvăluie natura

A doua zi, Oana o vizitează pe Arina.

Oana: Am venit cu o surpriză.

Arina: Una dulce?

Oana: Ți-am adus informații despre un număr care nu este nici rațional, nici irațional, nici transcendent și despre natura căruia nu se știe nimic. Un număr care îi terorizează pe cercetători. Toate demonstrațiile propuse pentru identificarea lui s-au dovedit a fi false.

Arina: Hai, spune o dată despre ce număr e vorba!

Oana: Despre *Numărul C,* respectiv despre *Constanta lui Euler*.

Arina: Deci o constantă parșivă.

Oana: În 1734, matematicienii au fost surprinși citind un articol a lui Euler în care se demonstra că, deși seria armonică

$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} .... + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă, adică

tinde spre infinit, totuși diferența dintre suma ei parțială $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ cu logaritmul natural al

acesteia notat ln n are o limită finită când *n* tinde spre infinit, și anume numărul botezat *C*, în cinstea lui Euler.

Arina: De ce tocmai *C* și nu *E,* de la *Euler*?

Oana: *C* este o prescurtare de alint pentru *Constanta lui Euler*. E clar că sumele parțiale ale seriei armonice cresc în

Leonhard Euler

aceeași măsură ca și logaritmii naturali corespunzători numerelor respective, ceea ce face ca diferența lor să rămână constantă. În ciuda calculelor a zeci și sute de zecimale, constanta nu-și dezvăluie natura, rezistând eroic la atacul matematicienilor. S-au implicat în această cursă atât Gauss, cât și Shanks, ca și alți matematicieni: J.C. Adams (1819-1892), E Catalan (1814-1894), P.L. Cebîșev (1821-1894), Paul Appell (1855-1930), deci matematicieni de diferite națiuni, germani, englezi, belgieni, ruși, francezi... Totul degeaba.

Triumful lui zero

Arina: Oana, hai să vorbim puțin despre celebrul zero. Când a fost recunoscut ca număr?

Oana: Târziu. O fi semn, o fi număr? – s-au întrebat oamenii, multă vreme. Mai întâi, s-a optat pentru zero ca simbol fără valoare numerică intrinsecă, având doar calități operatorii. Fără a-și face o idee clară despre zero, scribii egipteni lăsau un spațiu liber acolo unde acesta ar fi trebuit să figureze.

Arina: Și cum a fost suplinită lipsa lui zero?

Oana: A fost suplinită prin procedee deosebit de ingenioase, așa încât se vorbește despre numeroșii lui precursori. Îți amintești, Arina, că romanii, pentru a amplifica un număr cu 1 000 îl surmontau cu o bară orizontală, iar pentru a-l înmulți cu 100 000, îl încadrau într-un dreptunghi

fără bază? Iar grecii, pentru a mări un număr de o mie de ori, îl precedau cu o bară verticală. În același scop, în scrierea ebraică se obișnuia să se pună două puncte deasupra numărului. Punctele au fost magistral folosite în locul lui zero de către călugărul bizantin Neophitos (sec. XII), care punea peste număr atâtea puncte câte zerouri am pune noi. O bară verticală surmontată de un punct îl simboliza pe 10, de două puncte pe 100, de trei puncte pe 1 000 ș.a.m.d. Astfel, 3207 se nota: $\dot{\dddot{3}}\,\ddot{2}\,7$.

În Antichitate, egiptenii, al căror sistem de numerație nu avea ca cifre decât unitatea, baza 10 și puterile bazei, știau să înmulțească un număr cu 10: era suficient să avanseze cu un rând, în ierarhia puterilor fiecărei cifre folosite, pentru scrierea numărului.

Arina: Babilonienii trebuie să-l fi folosit pe zero cu mult timp în urmă.

Oana: Dimpotrivă, nu l-au folosit decât târziu și exclusiv în poziție mediană, sub forma semnului de separare între cuvinte. Ei erau conștienți că sistemul lor abstract cu baza 60 le îngăduia să treacă de la o putere a bazei la puterea următoare, cu singura condiție să dilate, să mărească semnul care simboliza unitățile simple.

Arina: *Zero operator* când a început să fie folosit? Știu că un operator este un simbol matematic care indică o operație ce trebuie realizată.

Oana: Pentru a vorbi de zero conceput ca operator, trebuie să realizezi că adăugarea lui zero cifrei care reprezintă unitățile simple multiplică automat numărul în întregime cu baza de numărare. Mayașii au folosit zero terminal și pe zero operator. Eruditul francez Girard Raphael, în *Le popol-Vuh* (în mayașă *popo* = *casa obștei*, *vuh* = *carte*). *Histoire culturelle des mayas* –

Quinché, Paris, 1954, susține că *„Mayașii au descoperit conceptul de zero și utilizarea lui cu cel puțin 1 000 de ani înainte ca vreo națiune similară să-l fi cunoscut și folosit“*. Zero era reprezentat printr-o scoică sau printr-un melc (simbol al regenerării). În mitologia mayașilor, zero corespunde momentului sacrificiului Zeului Erou al Porumbului, care se scufundă în râu pentru a reînvia, a se înălța la Cer și a deveni Soare. În procesul de germinare a porumbului, acest moment marchează dezintegrarea seminței în pământ, înainte ca viața să se manifeste iar, dând la iveală frageda tulpină a porumbului. În gliptica (arta gravării) maya, zero era reprezentat printr-o spirală, infinutul închis prin infinitul deschis, după cum susține Eric J. Thompson, în *Maya Hieroglyphic writing*, University of Oklahoma, 1960. Concepția mayașilor despre zero operator nu era, însă, prea clară.

Arina: La alte popoare când a apărut zero?

Oana: La chinezi, zero a apărut în secolul al VIII-lea. În scrierea pozițională, ei au utilizat atât pe zero median, cât și pe cel operativ. La indieni, ambele tipuri de zero au o formă unică, desăvârșită: aceea pe care o folosim și noi. Termenul *sunya,* care înseamnă *gol,* reprezenta cifra zero la indieni. Arabii l-au tradus prin *aș-șifr*, care îl evocă pe românescul *cifră,* provenit din italiană – *cifr*a; în latină – *cifra*; în franceză – *chiffre*.

Arina: Dar în Europa?

Oana: Zero a fost cunoscut în Europa încă din secolul al XII-lea, o dată cu introducerea sistemului pozițional de scriere a numerelor, dar va fi recunoscut ca număr abia în secolul al XVII-lea.

Arina: De ce așa de târziu?

Oana: Din cauza mentalității! Vidul era mai greu de perceput.

Arina: Mi-ai vorbit cândva despre introducerea cifrelor arabe în Occident, implicit a lui zero.

Oana: Am noutăți în problema asta. Ieri, tocmai am citit din cartea lui Marc-Alain Ouaknin, *Mystères des chiffres*, apărută la Paris, în 2004, și mi-a atras atenția o idee a autorului în legătură cu introducerea cifrelor arabe în Occident în mod indirect, prin impactul Cruciadelor, care au influențat mentalitatea occidentală să-l accepte pe zero.

Arina: Cum adică?

Oana: M.A. Ouaknin susține că vidul a devenit posibil de a fi gândit și a fi acceptat după ce cruciații au înțeles că Sfântul Mormânt era gol după înălțarea lui Iisus. Iată ce scria, în 1950, cunoscutul psiholog elvețian Jean Piaget (1896-1980) în *Introduction à l'épistémologie génétique.* Tome I: *La pensée mathématique*. Îți citez din memorie: *Numărul zero ne dă prototipul în același timp al unei conștientizări tardive și al unei imposibile abstracții plecând de la obiect. Într-adevăr, este una dintre marile descoperiri ale istoriei matematicii că a făcut din zero un număr, căci dacă zero logic („nici unul") este, fără îndoială, tot atât de vechi ca și limbajul (și poate chiar că „nu" a precedat totdeauna pe „da"), au trebuit deci învinse aceleași dificultăți pentru a conștientiza pe zero aritmetic ca și pentru numărul negativ. Or, rațiunea acestor dificultăți apare aici foarte clar; dacă conștientizarea se ridică de la periferie la centru, ultima dintre etapele sale va consta cu siguranță în a realiza că absența unei operații este încă o operație. Atâta timp cât se caută numărul în obiect, șirul numerelor începe în consecință cu 1. A vedea în zero pe cel dintâi dintre numere înseamnă, dimpotrivă, a face abstracție de obiect (zero logic fiind suficient pentru a exprima absența lui) și a-l extrage doar din operații unice, orice operație aditivă compusă cu inversul ei ajungând atunci la această operație fundamentală care este absența operației, adică „operația identică" 0.*

INTEROGAȚII VECHI ȘI NOI

Numere prime

E duminică și Arina acceptă, până la urmă, o plimbare cu Georgel, în parc. Dar e cam absentă și morocănoasă, cu toate desfășurările verbale ale colegului.

Georgel: Ce ți s-a întâmplat, Arina?

Arina: Mai sunt două luni până la concurs și am atâtea lacune…

Georgel: Păi, văd că tot umbli prin biblioteci și scoți informații.

Arina: Mă chinuie numerele prime. Sunt așa de imprevizibile. Ce mai, sunt diabolice!

Georgel: Nu te enerva, Arina. O să-ți împrumut *Elementele lui Euclid* și o să găsești, în *Cartea a VII-a,* o teorie a numerelor prime între ele și a numerelor prime absolute, iar în *Cartea a IX-a* câteva teoreme foarte subtile și deosebit de frumoase, printre ele pe acelea care stabilesc existența unei infinități de numere prime. Vom avea atunci prilejul să le discutăm. Mai e, apoi, matematicianul, astronomul și filosoful grec Eratostene (284-192 î.e.n), care a descoperit un procedeu de aflare a numerelor prime. *Ciurul lui Eratostene* este un procedeu elementar pentru aflarea numerelor naturale prime mai mici decât un număr dat.

Arina: În ce constă procedeul?

Georgel: Constă în a scrie șirul numerelor naturale 1, 2, 3…, după care se elimină mai întâi numerele pare, excepțându-l pe 2, care este număr prim, apoi multiplii lui 3,

exceptând pe 3 ș.a.m.d. Dacă numărul final al șirului este A, operația continuă până se ajunge la un număr prim B, al cărui pătrat este superior lui A. Numerele neeliminate sunt numerele prime căutate. Matematicienii se chinuiesc de peste două milenii să detecteze cât mai multe numere prime, numărul lor fiind infinit de mare.

Arina: Apropo de numerele prime, ce e cu numerele lui Fermat și cu numerele lui Mersenne (1588-1648)?

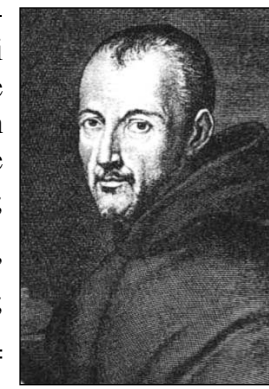
Georgel: *Numerele lui Fermat*, de forma $2^{2n} + 1$, intervin în diviziunea cercului. Pierre de Fermat le-a calculat pe primele patru dintre ele și a constatat că sunt numere prime; atunci a susținut că toate numerele de acest tip sunt prime! Dar a greșit! Euler, care l-a calculat pe cel de al cincelea număr, a constatat că nu e prim, întrucât se divide cu 641! Pentru $5 < n < 16$ au fost verificate toate numerele lui Fermat și nu sunt prime. Dar matematicienii au perseverat în căutările lor, ajungând la numere de lungime astronomică. În 1945, un astfel de număr avea aproximativ 10^{582} de cifre. Și matematicienii se tot întreabă dacă o fi existând un număr infinit de numere prime Fermat ori nu? Fermat s-a înșelat, căci multe dintre numerele sale nu sunt prime. Dar s-a înșelat și în alte cazuri.

Arina: Adică?

Georgel: Păi, prin 1641, a enunțat trei teoreme greșite relative la numerele prime. Cea dintâi: Nici unul dintre numerele prime de forma $12k + 1$ nu este divizorul vreunuia dintre numerele $3^n + 1$. A doua: Nici unul dintre numerele prime de forma $10k + 1$ nu este divizorul vreunuia dintre numerele $5^n + 1$. A treia: Nici unul dintre numerele prime de forma $10k – 1$ nu este divizorul vreunuia dintre numerele de forma $5^n + 1$.

Arina: Și numerele celebrului călugăr și învățat francez Marin Mersenne?

Georgel: *Numerele lui Mersenne* de forma $2^n - 1 (n = 1, 2, 3...)$ prezintă interes deoarece cu ajutorul lor putem afla așa-numitele numere pare perfecte. Al n-lea număr al lui Mersenne se poate defini, de asemenea, ca suma primilor n termeni ai progresiei geometrice 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 .... Avem $M_1 = 1$; $M_2 = 3$; $M_3 = 7$; $M_4 = 15$; $M_5 = 31$, căci $M_1 = 2^1 - 1$; $M_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1$; $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1$; $M_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1$; $M_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1$.



Marin Mersenne

Arina: Până acum, care e cel mai mare număr prim depistat?

Georgel: Recordul a fost înregistrat în anul 2004, cu numărul $2^{824036583}$, un număr care conține 7 235 233 de cifre. Se observă că este un număr al lui Mersenne, și anume al 41-lea număr al lui.

Arina: Problema repartiției numerelor prime îi chinuie mult pe matematicieni.

Georgel: Cei care s-au ocupat de aritmetică, de la Euclid la Euler, s-au străduit să reducă, progresiv, imprevizibilitatea apariției numerelor prime.

Arina: Și n-au reușit.

Georgel: Au atacat problema din mai multe părți. Au căutat să determine *a priori* pentru oricare *n* care era al *n*-lea număr prim: intervalul ce separă două numere prime consecutive, cum se repartizau numerele prime în cadrul diferitelor progresii aritmetice de rație *k,* în

sfârșit, care era numărul numerelor prime mai mici decât un număr dat. Și așa, de-a lungul timpului, au fost demonstrate o seamă de supoziții celebre, dar au rămas încă multe chestiuni neelucidate. În 1974, Jones P. James a dat un polinom cu 26 de nedeterminate, cu coeficienți întregi a căror mulțime a valorilor pozitive este exact *mulțimea numerelor prime*. Numerele acestea nu figurează, însă, în ordine și fiecare dintre ele apare de o infinitate de ori.

Arina: Interesant!

Georgel: Interesantă e și afirmația că pentru orice întreg n > 1 există cel puțin un număr prim cuprins între n și 2n. Conjecturată de Joseph Louis François Bernard (1822-1900), afirmația a fost demonstrată în 1851 de Pafnuti Livovici Cebîșev (1821–1894).

Arina: Am citit despre așa-zisa *lege asimptotică a numerelor prime*. Gauss și confratele său francez Adrien Marie Le Gendre (1752-1833) au presupus acum mai bine de 200 de ani că dacă π reprezintă numărul numerelor prime mai mari sau egale cu x, atunci

$$\pi(x) \cong \frac{x}{\log x}$$

Arina: În 1896, matematicianul francez Jacques Hadamard (1865-1963), membru de onoare al Academiei Române, și matematicianul belgian Charles-Jean Gustave Nicolas de la Valée Poussin (1866-1962) au dat o primă demonstrație a acestei legi. Există și o demonstrație mai recentă, datorată unui compatriot al nostru, Mihnea Moroianu, pe care o dezvoltă în studiul *Teoria numerelor prime,* din volumul *Analiza complexă. Aspecte clasice și moderne,* apărut în 1988,

la Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică. În demonstraţia analitică a legii asimptotice, Mihnea Moroianu utilizează proprietăţile funcţiei zeta a lui Riemann, definită pentru Re z > 1 prin relaţia: $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Georgel: Sunt o mulţime de descoperiri pe care le-au făcut matematicienii şi care, cu siguranţă, te vor interesa. Bunăoară, există şiruri de numere prime care conţin progresii aritmetice.

Arina: De exemplu?

Georgel: 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089, progresie de zece termeni de raţie 210. În anii '90 ai secolului trecut, matematicienii au emis ipoteza unor progresii aritmetice lungi formate din numere prime.

Arina: Şi ce e cu *numerele prime gemene*, de felul: *p* şi *p* + *2*, unde *p* este un număr prim?

Georgel: Întrebarea este dacă aceste numere sunt infinit de multe. Ipoteza care afirmă infinitatea unor astfel de cupluri nu a fost demonstrată. Frecventele demonstraţii propuse sunt repede invalidate. Totuşi, există o consolare: în 1989, matematicianul budapestan Antal Balog a obţinut un rezultat satisfăcător în cazul câtorva şiruri, printre care (*p, p + 2, p + 6*), un fel de „bănuială generalizată". Îţi mai semnalez un fapt: în 1885, Viggo Brun a afirmat că seria:

$$(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{19})+....\ ,$$

în care numitorii parcurg mulţimea numerelor gemene, este convergentă, pe când seria

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+....$ este divergentă atunci când numitorii parcurg numerele prime.

Ipoteza lui Riemann – problema mileniului

Georgel: Problema obsedantă a imperiului numerelor prime este aceea a repartiției lor. După cum se știe, ea datează din Antichitate. În 1859, folosind o funcție denumită ζ (zeta), matematicianul german Bernhard Riemann (1826-1866) a propus o repartiție pentru numerele prime. De aproape un secol și jumătate această ipoteză focalizează interesul celor mai mulți matematicieni. Aceasta pare să fie cea mai importantă teoremă a teoriei numerelor. Știm că $\zeta(s) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$

Arina: Cunosc formula lui Riemann.

Georgel: Să vedem ce reprezintă această funcție ζ. Profit de faptul că am agenda la mine și o să-ți notez ceea ce îți spun. Propun să intrăm în parc și să stăm pe o bancă. Deci: fie k corpul numerelor raționale. Pe acest corp, Riemann a definit funcția: $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, unde n parcurge toți întregii mai mari decât 0 din *k* și unde *s* este o variabilă complexă, a cărei parte reală este totdeauna mai mare decât 1. Această funcție mai admite o reprezentare sub formă de produs:

$$\zeta(s) = \pi \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

unde *p* parcurge toate numerele prime din *k*.

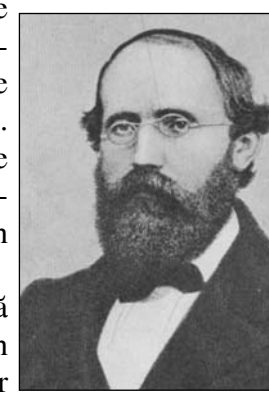
Deci, există o legătură strânsă care unește funcția $\zeta(s)$ de repartiția numerelor prime *p* din corpul *k*.

În acest fel, Riemann a putut construi o funcție $F(x)$, care dă numărul numerelor prime inferioare unui număr pozitiv arbitrar.

Arina: Și, evident, formula lui Riemann n-a fost demonstrată.

Georgel: Ea se bazează pe ipoteza foarte precisă privind amplasarea zerourilor acestei funcții. Frecvent, apar pe siteurile Internetului ecourile unor posibile demonstrații care, foarte curând, se dovedesc a fi eronate. Dar aura de senzațional a problemei centrale din câmpul teoriei numerelor este fascinantă. Deși n-a putut fi demonstrată, teorema constituie o inepuizabilă sursă de inspirație pentru cercetare. Rezultatele colaterale, neașteptate, apar continuu, în ciuda permanentului eșec al demonstrației ei.

Arina: Acum câteva zile, am citit despre un rezultat interesant de acest fel. Este vorba despre bănuiala matematicianului chinez Jincrut Chen (1933-1996), că există o infinitate de numere prime, astfel ca $p+2$ să fie sau prim sau produsul a două numere prime. Teorema a fost demonstrată cu ajutorul funcției ζ de către matematicianul rus P.I. Cebîșev. De altfel, funcția ζ este prototipul unei familii foarte generale de funcții, care intervine în teoria numerelor.



Bernhard Riemann

Georgel: Ipoteza lui Riemann a fost testată pentru valori numerice din ce în ce mai mari pe calculator, dar degeaba, tot nedemonstrată a rămas.

Arina: Îți mărturisesc, Georgele, că eu sunt fascinată de personalitatea lui Riemann. A fost cel mai romantic dintre marii matematicieni! Pasiunea

cunoașterii și genialitatea l-au făcut, în ciuda unei constituții fizice fragile, să reușească performanțe revoluționare, să creeze geometria care îi poartă numele, folosită de Einstein în teoria relativității, să se numere printre fondatorii topologiei moderne, să aducă strălucite contribuții la analiza matematică și la teoria numerelor.

Marea provocare a lui Gödel

Pentru moment, discuția se oprește aici. Numai pentru moment, fiindcă Arina îi propune, curtenitor, lui Georgel, o nouă întâlnire, eventual la sfârșit de săptămână. Până atunci, va consulta noi titluri și va medita pe îndelete asupra atâtor chestiuni în suspensie.

Duminică după-amiază, cei doi prieteni reiau dialogul.

Georgel: Bună, Arina, te-ai mai clarificat?

Arina: Încerc să mă documentez cât mai amănunțit, la bibliotecă.

Georgel: Apropo, uitându-mă prin biblioteca mea, am găsit un raport al lui David Hilbert despre teoria numerelor algebrice – numere care sunt rădăcinile unui polinom cu coeficienți raționali. Matematicianul german l-a întocmit la cererea Societății de Matematică din Germania, în 1897. Raportul este o prezentare magnifică a problemei și o sursă de inspirație pentru specialiști. Află că Hilbert stabilește axiomatizarea completă a geometriei și susține că necontradicția axiomelor geometriei se bazează pe necontradicția aritmeticii, în care avea o credință oarbă. Era sigur că formalizarea completă a matematicii *„va înlătura definitiv orice îndoială asupra perfectei siguranțe a raționamentului matematic“*.

Arina: Hilbert a încercat să demonstreze că matematica ar putea fi fundamentată definitiv dacă, operându-se cu simboluri matematice, n-ar apărea contradicții formale.

Georgel: Ca de pildă 0 = 1!

Arina: A aplicat ideea la geometria euclidiană, reducând contradicția geometrică la cea a aritmeticii.

Georgel: Evident că a fost un eșec, fiindcă necontradicția s-a arătat că nu poate fi demonstrată nici pentru aritmetică.

Arina: De fapt, matematicienii – de la greci până la Hilbert – fuseseră ferm convinși că: *a.* problemele aritmeticii au un răspuns adevărat și unul singur, restul fiind obligatoriu fals; *b.* trebuie să existe o cale sigură pentru a descoperi aceste adevăruri; *c.* aceste răspunsuri, o dată găsite, trebuie să fie compatibile între ele și să formeze un tot. Iluzii!

Georgel: Ambițios, Hilbert declara: *„Noi vom ști! Noi trebuie să știm!“*.

Arina: Ce naiv! Genialul Kurt Gödel (1906-1978), logician și matematician american de origine austriacă, a scos în evidență, prin teoremele sale de incompletitudine, caracterul deschis al cunoașterii matematice. Gödel a arătat că, dacă se stabilesc regulile de inferență și un număr finit de axiome, există aserțiuni precis formulate pentru care nu se poate demonstra nici că sunt adevărate, nici că sunt false. Ne confruntăm cu ceea ce se numește indecidabilitate!

Kurt Gödel

Georgel: Realizăm că nu este posibil să dobândim toate adevărurile despre adunare, înmulțire, șirul numerelor întregi deducându-le din cele câteva axiome pe care se bazează aritmetica.

Arina: Am citit despre faimoasele teoreme de incompletitudine enunțate acum 75 de ani, care au produs marea criză a fundamentelor matematicii. Prima teoremă de incompletitudine a lui Gödel legată de incompletitudinea sistemelor formale afirmă că *un sistem suficient de bogat și corect este incomplet*. Cea de a doua teoremă de incompletitudine, legată de imposibilitatea demonstrării necontracției sistemului formal prin mijloacele sistemului însuși, afirmă că *dacă T este un sistem suficient de bogat și consistent, atunci formula care afirmă consistența lui T este nedemonstrabilă în T*. Chiar și problema opririi unui program în informatică este una indecidabilă!

Georgel: Kurt Gödel a arătat, pe de o parte, că oricărei axiomatici i se poate atașa o ecuație pentru care este imposibil să se decidă dacă are sau nu soluție în cadrul sistemului de axiome alese și, pe de altă parte, că alt sistem de axiome permite să se decidă dacă o astfel de soluție există sau nu. Deci axiomaticele sunt incomplete. De aici, o interesantă idee a matematicianului de origine argentiniano-americană Gregory Chaitin (n. 1947), pe care am reținut-o din revista „La Recherche“, apărută la Paris, în decembrie 2003. Acesta sugerează că numărul axiomelor aritmeticii ar putea crește mult. *„E posibil, de exemplu* – scrie Chaitin –, *ca vechi probleme nerezolvate, precum aceea de a ști dacă există o infinitate de numere prime gemene (numere impare separate de un număr par), să fie numărate printre axiome. În acest caz, existența unei infinități de numere prime gemene este adevărată și nedemonstrabilă. Poate că ipotezele mult mai complexe, precum aceea a lui Riemann, vor trebui să fie considerate axiome“*.

Arina: Să nu fim nedrepți cu Hilbert. Și giganții mai greșesc!

Georgel: Într-adevăr, rolul lui Hilbert în orientarea cercetării matematice a fost covârșitor. La Congresul Internațional de Matematică ținut la Paris în anul 1900, el a propus 23 de probleme cruciale în orientarea cercetărilor matematice. Era încă posibil ca un singur om să îmbrățișeze ansamblul matematicii. Evident că nu toate problemele acestea au același statut. Unele pot fi calificate „probleme mari", altele particulare. Astfel, problema a X-a, care privește rezolvarea ecuațiilor în numere întregi, conține, de fapt, toate chestiunile matematice a căror formulare poate fi adusă la o ecuație algebrică, așa cum a arătat I. Matiasevici, în anul 1970.

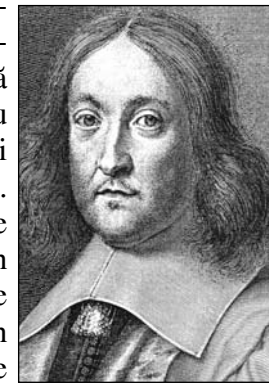
Arina: O să te minunezi că mi-am extras date în problema asta. Îmi amintesc enunțul lui Hilbert. Să ți-l citesc: *„Se știe că o ecuație diofantică este o ecuație algebrică cu coeficienți întregi, pentru care se caută rădăcini numai numere întregi. Dintre acestea, cea mai des întâlnită este ecuația* $x^n + y^n = z^n$*, despre care P. Fermat a afirmat că nu are rădăcini întregi pentru* $n \geq 3$ *"*. Este celebra teoremă a lui Fermat, enunțată în 1637, care a fost rezolvată în 1993 de matematicianul englez Andrew Wiles (n. 1953). Cea de a X-a teoremă a lui Hilbert a fost rezolvată mult mai rapid, doar după 70 de ani. În 1970, Matiasevici a arătat, în mod neașteptat, că nu există un astfel de algoritm, ecuațiile diofantice constituind o clasă nedecidabilă (pentru care nu se poate arăta nici dacă sunt adevărate, nici dacă sunt false). Rezultatul acesta are consecințe curioase și profunde, multe probleme putând fi reduse la determinarea rezolvării sau nerezolvării unor ecuații diofantice.

Georgel: Văd că ți-a priit biblioteca.

Arina: Am extras și eu problemele privind numerele din lista lui Hilbert. Unele au fost rezolvate, ca, de pildă, problema a X-a sau problema a VII-a, care cerea stabilirea transcendenței unor numere. Altele, însă, sunt în așteptare, cum este cazul problemei a VIII-a, care cere să se studieze distribuția numerelor prime și, în particular, să se demonstreze ipoteza lui Riemann.

Legenda lui Fermat

Arina: Pierre de Fermat – botezat „Prințul amatorilor de matematică“ – a reprezentat, într-adevăr, o legendă în istoria matematicii. Contribuțiile lui, fără finalitate lucrativă, reprezentau „distracțiile“ lui, profunda lui dragoste pentru matematică. Opera sa a exercitat o atracție irezistibilă timp de secole, până în zilele noastre, și l-a inclus printre marii matematicieni ai lumii. În teoria numerelor, „teoremele sale de aritmetică“ sunt importante, printre altele, deoarece sugerează cercetări în aritmetică și, în general, în matematică și pentru că se dovedesc universale din mai multe puncte de vedere. Fermat a enunțat foarte multe teoreme despre numerele prime, obișnuind să le noteze pe marginea cărții lui Diofant, fără a da demonstrația acestora. De o extremă simplitate și frumusețe, ele au incitat spiritele matematicienilor, care s-au chinuit sute de ani să le demonstreze.



Pierre de Fermat

Georgel: Acum să-ți spun și eu, Arina: la timpul său, Fermat a susținut că rădăcinile ecuației $x^n + y^n = z^n$, unde n este un număr natural egal sau mai mare decât 3, nu pot fi numere întregi. Au urmat trei secole și jumătate de încercări zadarnice pentru a se ajunge la demonstrația acestei supoziții.

Arina: Totuși, în decursul vremurilor, au fost rezolvate cazuri particulare. Fermat a demonstrat teorema pentru n = 4, Leonhard Euler pentru n = 3, Adrien Marie Le Gendre și germanul Gustav Lejeune Dirichlet pentru n = 5, inginerul francez Gabriel Lamé pentru n = 7, Ernest Eduard Kummer pentru toate puterile până la 100, excepție făcând 37, 59 și 67, performanță pentru care a primit Marele Premiu al Academiei Franceze.

Georgel: Au fost enunțate și rezolvate, în paralel, alte probleme matematice, ca, de pildă, de către matematiciana franceză Sophie Germain (1776-1831). De numele ei se leagă demonstrarea imposibilității rezolvării teoremei lui Fermat dacă x, y și z nu sunt divizibili printr-un număr prim impar. Tot ea i-a furnizat lui Le Gendre, pentru cea de a doua ediție a *Teoriei numerelor* (1825), multe teoreme interesante. Un rezultat paralel mai recent se datorează lui G. Falting, care, în 1983, arăta că ecuația lui Fermat nu are pentru $p \geq 5$ decât un număr finit de soluții fără divizori comuni.

Arina: Și mai recent, în iunie 1993, Andrew Wiles, cercetător britanic, care lucra la Universitatea Princeton din S.U.A., a anunțat demonstrarea unei ipoteze centrale a matematicii contemporane numite *Shimura-Taniyama*. Se știa, încă din 1986, că această ipoteză antrenează demonstrarea teoremei lui Fermat. În timp, s-au adunat numeroase rezultate care veneau în sprijinul lui

Wiles. El citează, în studiul său, peste 60 de lucrări. La colocviul de la Cambridge din 1993, unde avea să prezinte pentru prima oară propriile sale cercetări, Wiles a precizat „cele trei tipuri de obiecte ale sale: *curbele eliptice*, *formele modulare* și *reprezentările galoise"*. Evident, evenimentul a provocat mare vâlvă. Lui Wiles i-au mai trebuit câțiva ani pentru șlefuirea teoremei. E foarte greu de urmărit, și eu nu am suficiente cunoștințe matematice, îmi trebuie o pregătire specială ca să înțeleg cele trei tipuri de obiecte pe care le-am menționat. Deocamdată, mă resemnez să iau acești termeni ca pe niște „ființe matematice" importante.

Georgel: Nici o problemă, Arina, peste câțiva ani, când o să devii studentă, o să înțelegi terminologia și demonstrația.

Conjecturi năbădăioase

Arina: Trebuie să-ți mărturisesc, Georgele, că mă incită așanumita *conjectură* a lui Goldbach.

Georgel: Conjectura lui Goldbach! Termenul conjectură, atât de frecvent folosit de matematicieni, provoacă iritare printre nematematicieni. „Conjectura" seamănă, ca sonoritate, cu „conjunctura", dar e cu totul altceva. Conjectura reprezintă termenul îndrăgit de matematicieni pentru a desemna bănuiala. Se pomenesc conjecturile lui Fermat, Gauss, Le Gendre, Chen ș.a. De fapt, bănuielile constituie un ferment eficient al descoperirilor matematice. Un mare matematician contemporan, francezul de origine germană Alexander Grothendieck (n. 1928), ale cărui rezultate, noțiuni, metode constituie o etapă decisivă în dezvoltarea matematicii contemporane,

datorită profunzimii ideilor sale, ingeniozității tehnicilor utilizate și nivelului ridicat de generalizare a abordărilor, spunea așa de frumos: „*Simplul fapt de a descrie intuiții aluzive sau simple bănuieli are putere de transcendere*“. Dar ce pare așa de incitant în întrebarea lui Christian Goldbach (1690-1767) dacă este posibil să scriem „*orice număr par ca rezultat al adunării a două numere prime*? “.

Arina: Păi, interesantă este cursa amețitoare a matematicienilor pentru aflarea adevărului. Cursă care o amintește pe cea desfășurată pentru obținerea unui număr cât mai mare de zecimale ale lui π .

Georgel: Conjectura aceasta semnalată lui Euler de către Goldbach, într-o scrisoare din 7 iunie 1742, i-a adus acestuia din urmă celebritatea.

Arina: Și de atunci conjectura nu a fost încă demonstrată. Nu e greu de găsit cupluri de numere prime care să constituie o partiție Goldbach a unui număr par. De exemplu (5, 7) și 12 sau (11, 13) și 24, fiindcă 12 = 5 + 7, iar 24 = 11 + 13. Așa au început încercările. În 1855, matematicianul francez A. Deboves a condus o cercetare exhaustivă pe 10 000 de numere prime. Iar începând din 1940, cu ajutorul calculatorului, au fost testate din ce în ce mai multe numere. Milionul a fost depășit în anul 1964, iar miliardul în 1989. În octombrie 2003, Thomas Oliveiro e Silva, cu echipa lui de la Universitatea Alveino (Portugalia), a bătut ultimul record, mergând mult mai departe, pentru $6x10^{16}$ (6 urmat de 16 zero)!! Și se zvonea că se pregătește analiza a 10^{18} numere! Apropo, despre ipoteza lui Ghilbrealh ai auzit?

Georgel: Am auzit câte ceva. N. Ghilbrealh a emis, în 1958, următoarea ipoteză: Dacă scriem șirul numerelor prime consecutive, apoi, dedesubt, în primul rând, șirul diferențelor consecutive dintre numerele prime, în rândul următor șirul valorilor absolute ale diferențelor dintre termenii consecutivi din rândul al doilea ș.a.m.d., atunci primul termen din fiecare rând va fi 1. Am la mine schema.

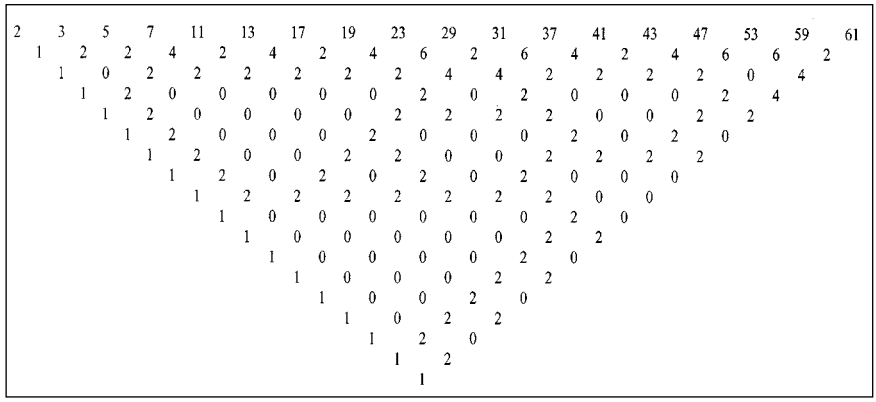


Fig. 41. *Conjectura lui N. Ghilbrealh*
(Reprodus după: W. Sierpinski, *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*, București, Editura Științifică, 1966, p. 31)

Georgel: Ipoteza a fost verificată, în 1959, pentru primele 63 418 rânduri de către R.B. Killgrove și K.E. Ralston. Dar W. Serpinski susținea că nu există încă o demonstrație a acestei ipoteze.

Ființe matematice magice

După două zile de studiu și clarificări, Arina și Georgel se revăd.

Georgel: Cum te-ai distrat ieri, Arina?

Arina: M-am distrat cu pătrate magice formate din numere prime. Știi ce sunt pătratele magice?

Georgel: Uite că nu prea.

Arina: Un pătrat magic este un tablou pătrat compus din n^2 numere naturale diferite, așezate în *n* linii și *n* coloane, iar sumele numerelor care se obțin de pe orice linie, coloană sau diagonală sunt egale între ele.

Georgel: Fascinant! De când sunt cunoscute?

Arina: Încă din Antichitate. Astrologii din China, Japonia, India și din țările învecinate acestora le considerau binefăcătoare. De unde moda de a le imprima pe tăblițe de metal, pentru a fi purtate ca amulete. Așa se explică originea numelui lor. Ulterior, au început să-i intereseze și pe matematicieni, stârnindu-le spiritul ludic.

Georgel: Dă-mi un exemplu de astfel de pătrat.

Arina: Unul „mititel", format din nouă numere prime:

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Georgel: Stai să verific.

67+1+43 =111; 13+37+61=111; 31+73+7=111
67+13+31=111 1+37+73=111 43+61+7 =111
67+37+ 7=111 43+37+31=111

Da. Peste tot, aceeași sumă: 111.

Arina: Să-ți mai dau un exemplu de pătrat magic, tot cu 9 numere prime. Iată-l:

569	59	449
239	359	479
269	659	149

Georgel: Facem și aici verificarea:

569+ 59 + 449 = 1077 239+359+ 479 = 1077 269+ 659+ 149 = 1077
569+ 239+269 = 1077 59+359+ 659 = 1077 449+ 479+ 149 = 1077
569+ 359+149 = 1077 449+359+ 269 = 1077

E perfect!

Arina: Nu e greu de calculat un pătrat magic, ci doar de construit. Fermat a avut o adevărată pasiune pentru pătratele magice. La moartea lui, s-au găsit 14 caiete și multe foi volante pline cu pătrate magice. De altfel, într-o scrisoare către Mersenne, a mărturisit că nu cunoaște „*nimic mai frumos în Aritmetică decât aceste numere, pe care unii le numesc «planetarios», iar alții «magicos»*“.

Georgel: Și sunt multe pătrate magice?

Arina: A fost emisă ipoteza că pentru orice număr natural $n \geq 3$ există o infinitate de pătrate magice, care sunt formate din n^2 numere prime diferite. Nu știu dacă s-o fi demonstrat ipoteza. Și, ca să-mi etalez „erudiția“, o să-ți spun câte ceva și despre cuburile magice.

Georgel: Și cuburile magice se cunosc din vremurile de demult?

Arina: Cuburile magice îi pasionează pe matematicieni doar de vreo trei secole și ceva. Pentru prima oară, Fermat abordează subiectul în 1640, într-o scrisoare către Mersenne. În secolul al XVIII-lea, Leibniz se interesează, la rândul lui, de cuburile magice. Fiecare propunea o definiție.

Georgel: Și care e definiția acceptată în prezent?

Arina: Un cub magic de ordinul *n* reprezintă o stivuire de *n* pătrate de ordinul *n*, care conține toți întregii de la 1 la n^3, astfel încât suma numerelor oricărei coloane, linii orizontale, linii verticale sau marea diagonală este totdeauna aceeași. Atunci, însă, când diagonala pătratelor paralele fețelor

cubului dau, de asemenea, suma magică a liniilor, coloanelor, coloanelor verticale și a marilor diagonale, cubul se numește *cub magic perfect*. În prezent, matematicienii se joacă cu aceste cuburi magice perfecte.

Numerele prime și criptografia

Georgel: Eu unul m-am amuzat citind despre criptografie.
Arina: Te preocupă descifrarea secretelor, spionajul, trecerea prin zid?
Georgel: Nu râde, Arina. Azi, metoda cheilor secrete e la îndemână. Procedeele moderne cele mai eficace se bazează pe criptografia matematică. Și, ironia sorții, pe folosirea numerelor întregi și, în particular, a numerelor prime!
Arina: Glumești, Georgele!
Georgel: Absolut deloc. Așa-numita *metodă a cheilor publice* se bazează, în esență, pe următoarea problemă: fiind date două numere p și q destul de mari (de exemplu, având în jur de 100 de cifre fiecare), produsul lor pq poate fi ușor calculat cu computerul. În schimb, nu se cunoaște metoda care să permită regăsirea lui p și q pornind de la pq. Deoarece nu se cunoaște metoda de aflare a numerelor prime care compun un produs de numere prime, se pare că tocmai această lipsă asigură securizarea tranzacțiilor pe Internet. Iată cheia!

Numere aproape prime

Georgel: Dar despre numerele *aproape prime* ai citit, Arina?
Arina: Din păcate, nu!
Georgel: Un număr aproape prim este un număr compus pentru

care suma exponenților numerelor prime ce-l alcătuiesc are o limită superioară mărginită. Dacă această limită este 1, numărul este prim. Au fost obținute două teoreme: a. Există o infinitate de perechi formate dintr-un număr prim și un număr aproape prim a căror diferență este 2; b. Orice număr prim suficient de mare este suma unui număr prim și a unui număr aproape prim.

Arina: Să revenim la numerele prime. Au fost descoperite multe proprietăți ale acestora: orice număr impar este suma a trei numere prime, orice număr întreg se poate obține prin adunarea unor numere prime al căror număr e mărginit etc., etc. Dar mai sunt atâtea rămase fără răspuns.

Georgel: Și împătimiții caută armoniile din spatele haosului numerelor prime – temelia puternică a tuturor numerelor. Jincrut Chen a susținut că orice număr întreg suficient de mare este suma unui număr prim și a unui număr aproape prim. Rezultatul acesta este foarte învecinat cu Conjectura lui Goldbach, iar Iwaniec și Richert au afirmat că există o infinitate de întregi n, astfel încât $n^2 + 1$ să fie aproape prim.

Arina: Oare a avut dreptate matematicianul maghiar Paul Erdös (1913-1996) – cunoscut pentru numeroasele lui idei strălucite – când a spus, înainte de a muri: „*Va trebui să mai așteptăm un milion de ani înainte de a înțelege numerele prime*“?

Georgel: Teoria numerelor prime este, în principal, o creație a secolului al XIX-lea. De fapt, ea debutează cu aplicarea metodelor de analiză matematică la problemele din teoria numerelor. În 1737, Euler a dat o nouă demonstrație, în urma lui Euclid, a infinității numerelor prime. Era cea dintâi încercare de apropiere a aritmeticii

(studiul cantităților discontinue) de analiza matematică (studiul cantităților continue). Prima demonstrație a teoriei fundamentale a aritmeticii: *Orice întreg pozitiv poate fi scris ca produsul a două numere prime*, a apărut la începutul secolului al XIX-lea în *Disquisitiones Mathematical*, datorată lui Gauss. Contribuțiile din anii 1837-1839, ale matematicianului german Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), în care se aplică analiza matematică la teoria numerelor, au marcat o adevărată revoluție în teoria numerelor prime. În sfârșit, descoperirile ulterioare, din secolele al XIX-lea și al XX-lea, au impulsionat mult dezvoltarea teoriei numerelor prime.

Arina: După concurs, când voi avea mai mult răgaz, va trebui să mă pun la punct cu toate aceste contribuții. Deocamdată, m-am ales cu o concluzie importantă. Acum mi s-a făcut foame. Hai la masă.

Fișierul problemelor celebre

Georgel: Ești o veritabilă documentaristă, Arina. Ți-ai făcut un fișier de invidiat al problemelor celebre.

Arina: Al problemelor celebre din teoria numerelor.

Georgel: Și cum l-ai organizat?

Arina: După criteriul alfabetic. Am fișe pentru *Teorema lui Dirichlet a progresiilor aritmetice* și pentru *Marea teoremă a lui Fermat*, ca și pentru *Legea asimptotică a numerelor,* de Gauss și Le Gendre. Am scos note despre *Teorema lui Gauss a celor 3 pătrate.* Adică un număr natural *m* se poate scrie ca sumă a 3 pătrate de

numere naturale dacă și numai dacă $m \neq 4^a(8n + 7)$, pentru $a, n \in N$) – teoremă care a fost demonstrată.

Georgel: Despre Riemann, nimic?

Arina: Despre ipoteza lui Riemann am chiar foarte mult material, cules în ultimul an. Am făcut fișe pentru *Teorema lui H.F. Scherk* (există o alegere a semnelor „+" „–", astfel încât să aibă loc următoarele egalități:

$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm p_3 \pm \ldots \pm p_{2n-2} \pm p_{2n-1}$

$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm p_3 \pm \ldots \pm p_{2n-1} \pm p_{2n,}$ pentru $n \in N^*$, unde p_n semnifică al *n*-lea număr prim. Acest rezultat, conjecturat de Scherk în 1830, a fost demonstrat în 1928 de către S.S. Pillar). Apoi, fișe pentru *Teorema lui Schnirelman* (Există un număr natural *s,* astfel încât orice număr natural mai mare sau egal cu 2 se scrie ca suma a cel mult *s* numere prime, nu neapărat distincte. Teorema a fost demonstrată în anul 1933). În sfârșit, am redactat fișe pentru *Teorema lui Waring*.

Georgel: Adică?

Arina: Matematicianul englez Eduard Waring (1734-1798) a formulat, în anul 1770, următoarea conjectură: *Orice număr este suma a cel mult 4 numere pătratice, a cel mult 9 numere cubice, a cel mult 19 numere bipătratice* etc. Au fost necesari 200 de ani pentru a se demonstra această conjectură. Descompunerea în numere la puterea a doua (exemplu: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 + 1$) a fost demonstrată în 1770 de către matematicianul francez Louis Lagrange (1736-1813), iar descompunerea în numere la puterea a treia a fost demonstrată de matematicianul german Weiferich, în 1909.

Georgel: Și pentru puteri mai mari?

Arina: Fapt curios, pentru puterile mai mari demonstrațiile au fost mai ușoare. Datorită, bunăoară, contribuțiilor lui

David Hilbert, precum și ale matematicienilor englezi Geodfrey Harold Hardy (1877-1947) și George Edenson Littlewood (1885-1977), descompunerile numerelor la puteri egale sau superioare lui 6 au putut fi demonstrate în epoca interbelică. Cazul referitor la puterea lui 5 a fost dovedit de către Jincrut Chen în anii '60. Rămânea doar descompunerea în numere bipătratice de felul $79 = 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 + \ldots\ldots + 1^4 =$ 16 x 4 + 1 x 15 = 64 + 15, unde numerele puteau fi descompuse în 19 numere bipătratice. Folosind calculatorul, J.J. Deshouillers și Fr. Dress au demonstrat teorema în 1986, la Universitatea din Bordeaux.

Pot, oare, numerele să asigure onestitatea?

Gabriel: Alo, Arina? Am un text care mi se pare deosebit de interesant; ceva legat de numere. Pot să vin să ți-l arăt?

Arina: Sigur. Sunt curioasă să-l văd.

După o oră, cei doi se întâlnesc.

Gabriel: Este vorba despre textul unei comunicări prezentate la Congresul Internațional al Matematicienilor de la Beijing, pe 22 august 2002, de către Mary Poovey, director la Institute for the History of the Production of Knowledge de la Universitatea din New York.

Arina: Și care e titlul comunicării?

Gabriel: E, pur și simplu, incitant: *Pot, oare, numerele să asigure onestitatea? Așteptări nerealiste și scandalul bilanțului S.U.A.*

Arina: Sună tare!

Gabriel: Mary Poovey subliniază impactul noii axe de putere.

Evident, este vorba despre axa puterii financiare. Această axă are multe dimensiuni, multe cauze și efecte. Autoarea se mulțumește, în eseul său, să discute doar ceea ce analiștii numesc *finanțializare*, căreia îi spune *cultură financiară*.

Arina: Detaliază, te rog!

Gabriel: Mary Poovey abordează câteva dintre procedeele numerice și matematice pe care le folosește cultura financiară în scopul reorganizării relației dintre valoare și temporalitate.

Arina: Valoare și temporalitate! Marfă!

Gabriel: Transpunând în numere și ecuații concepte precum *riscul*, această cultură generează o nouă formă a valorii, care produce uriașe profituri celor ce stăpânesc regulile jocului și uriașe pierderi celor nepricepuți.

Arina: Care este punctul de pornire a lui Mary Poovey?

Gabriel: O observație obiectivă de natură istorică, și anume: cultura emergentă a finanței diferă față de economia de producție.

Arina: În ce sens?

Gabriel: În sensul că finanțele generează profituri primare prin investiție, prin mișcarea și comerțul cu valuta, precum și prin stabilirea de pariuri complexe în ceea ce privește creșterea sau scăderea prețurilor. Este evidentă deosebirea față de economia de producție, care generează profituri prin transformarea puterii de lucru în produse, iar acestea au prețuri și sunt schimbate la piață.

Arina: Într-adevăr, contrastul pare viguros. Dar economia de producție este puternică în foarte multe state.

Gabriel: Se observă, însă, schimbări în direcția noii situații. De pildă, în S.U.A., după anul 2000, profiturile financiare au depășit profiturile obținute de manufactură.

Arina: Pe ce instrumente pune accentul Mary Poovey?

Gabriel: Pe reprezentări și pe configurațiile bilanțului.

Arina: Eu știu ce pondere mare au reprezentările în sociologie, dar în finanțe?

Gabriel: Reprezentările propulsează dinamica operațiilor financiare. Uneori, ele înlocuiesc schimbul, iar alteori o reprezentare de moment constituie ceea ce contează în schimbul însuși. Combinația reprezentării cu schimbul produce tot felul de efecte materiale, fiindcă atunci când reprezentarea poate influența sau chiar poate lua locul schimbului, valorile mizei devin, de asemenea, noționale, iar profitul crește exponențial sau poate intra în colaps la o lovitură abilă.

Arina: Iată-ne pe un teritoriu cu tendințe abstracte!

Gabriel: De aceea, poate intra în joc matematica. Ea e cea care va duce abstractizarea la o cotă mai ridicată. Pentru a descrie schimbul cu ajutorul numerelor, trebuie să fie abstractizate unele trăsături care pot fi cuantificate și, la rândul lor, marginalizate altele care nu pot fi cuantificate. Acesta este momentul în care ecuațiile rulate pe calculator de către programe software devin mai importante decât schimburile, care s-ar fi putut realiza în alte condiții în timp și spațiu. Calculele sunt cele care stabilesc valoarea.

Arina: Această valoare e noțională. Și are calitatea că poate fi oricât de mare. Poate depăși chiar toată valuta existentă!!

Gabriel: Întreaga analiză pe care o face Mary Poovey se bazează pe date culese din S.U.A. Ea se referă la: comerțul zilnic, opțiunile stocului, marcarea bilanțului de pe piață, ajustarea rezervei de datorii păgubitoare, derivatele și caracteristicile lor adiționale.

Arina: Nu înțeleg nimic.

Gabriel: Ascultă-mă cu răbdare. O iau pe felii:

1. *Comerțul zilnic* – Un investitor își creează o imagine pur noțională asupra viitorului său, pentru a se îmbogăți pe moment. În această situație, cumpărătorii de acțiuni lucrează printr-o companie on-line, stârnindu-i pe alți investitori să cumpere din stoc, în mod anonim sau prin Internet. Cum manevra lor dă roade, alți investitori cumpără, iar prețul crește. Atunci, primul începe să vândă. Continuând vânzarea și antrenându-i și pe alții să vândă, prețul scade. În acel moment, el se decide să cumpere. Practica aceasta este veche, dar ceea ce caracterizează contemporaneitatea este viteza deciziilor; orele și chiar minutele sunt esențiale.

2. *Opțiunile stocului* – Salariații companiilor sunt recompensați și stimulați să facă opțiuni de stoc pentru a-și suplimenta venitul. Ce înseamnă asta? Compania le propune să achiziționeze din stoc un număr de acțiuni la o cotă scăzută, adică sub prețul pieței. Când acțiunile respective capătă o valoare mai mare, salariatul poate decide să le vândă cu profit. Companiile stimulează creșterea prețului printr-o combinație de sugestii pertinente făcute public, prin declarații și rapoarte bazate pe analiza unor specialiști care mânuiesc cu dexteritate numere și modele matematice.

Arina: Am auzit că sofisticările astea au dus, uneori, și la haos.

Gabriel: Da, atunci când s-a operat necinstit. Dar, te rog, Arina, lasă-mă să continui. Am ajuns la...

Arina: ...3. *Marcarea bilanțului de pe piață.*

Gabriel: Exact. Aici e de spus următorul lucru: companiile fac predicții, iar rapoartele pe care le întocmesc se bazează pe interpretări, ipoteze și ajustări, pentru a aduce la un numitor comun predicția cu raportul. E o practică ce le permite să obțină profituri înainte de realizarea lor

efectivă. Pe baza acestei practici, constituie parteneriate, fac achiziții, semnează tot soiul de contracte folosind profiturile anticipate ca pe profituri prezente.

Arina: Și ce e cu: 4. *Ajustarea la rezerva datoriei păguboase?*

Gabriel: E o altă manevră a companiilor. În această nouă manevră, în loc de înregistrarea viitoarelor profituri drept semne pentru bilanțurile de piață, se caută metode de deghizare a căderilor pe termen scurt ale companiilor, pe baza clauzelor, ceea ce permite acoperirea deficitului în caz că un creditor este în dificultate, folosind o parte din rezerva fondului.

Arina: Și fain-frumușel – am auzit eu – companiile mută suma respectivă care le lipsește din coloana rezervei în coloana profiturilor!

Gabriel: Îmi permiți să continui?

Arina: Daa!

Gabriel: Punctul 5. *Derivativele*. De regulă, oamenii sunt încredințați că *numerele întruchipează obiectivitatea,* chiar dacă nu pricep în ce fel au fost ele generate. Principiile matematice folosite de companii pentru a aranja lucrurile în favoarea lor sunt invizibile pentru cei mai mulți dintre investitori. Iar ecuațiile matematice devin cele dintâi mișcări ale valorii, deoarece, în momentul de față, piața ascultă de reguli matematice. Instrumentele care întruchipează această credință sunt *opțiunile viitoare* sau *derivativele.*

Arina: Te rog, focalizează puțin *derivativele*. Eu știu despre derivate de la analiza matematică, dar despre derivative n-am auzit.

Gabriel: În termenii cei mai simpli, Arina, derivativele sunt contracte cu dată de expirare fixă, al căror preț este determinat de valoarea unor bogății ascunse, precum

prețul valutei sau al megawattului/oră. Posesorul unui astfel de contract îl poate vinde înainte de data expirării; decizia lui nu provine din investigarea pieței, ci din evaluarea probabilității matematice că prețul va crește sau că va scădea. E un fel de pariu. Totul se negociază în secret, pe cale electronică. Avântul luat de derivative este remarcabil. Deja în anul 2001 – arată Mary Poovey – valoarea totală a contractelor derivative ale afaceriștilor se apropia de 1 000 de trilioane de dolari, egală cu valoarea totală aproximativă a producției globale a manufacturilor din ultimul mileniu.

Arina: Vrei să mă faci praf cu valoarea asta cosmică! Mi se pare că invenția asta nu e opera ultimelor decenii ale secolului trecut. Am citit undeva că încă în secolul al XVII-lea japonezii o practicau.

Gabriel: Da, dar ce importanță are. Compari un purice cu un elefant? Derivativele moderne articulează o multitudine de ecuații matematice, calculate electronic, care implică și problema riscului.

Arina: Operând cu numere oricât de mari, oamenii se conving că puterea lor e reală, atât în speculații, cât și în dominare, sau și în unele, și în altele.

Gabriel: Ca și alte instrumente de afaceri, derivativele și opțiunile viitoare reprezintă îmbinări ale reprezentării și schimbului, atât în ceea ce privește timpul, cât și riscul implicit. În acest fel, se creează în afaceri un mediu ambiant pur noțional, care există doar din punct de vedere electronic. În ciuda acestei situații, afacerile electronice produc efecte foarte palpabile. Când toate instrumentele financiare sunt folosite concomitent, așa cum se practică în instituțiile sofisticate din punct de vedere financiar, ele conving atât asupra obiectivității, cât și asupra veridicității numerelor și a încrederii că piața funcționează după legile matematice.

Arina: O clipă! Lămurește-mă, te rog, asupra corelației dintre axa financiară și această nouă cultură.

Gabriel: Se restructurează relația dintre temporalitate și valoare, se redefinesc noțiunea de muncă, relațiile dintre instituții, ponderea responsabilității. Marea putere de organizare cu care a fost înzestrat numărul cu multe milenii în urmă nu se dezice nici azi, fiindcă, în prezent, ca și oricând altădată, numărul e asociat cu bogăția și cu puterea.

Arina: Dar ce părere ai despre valoarea lui morală?

Gabriel: Să citez ceea ce a spus la sfârșitul secolului al V-lea î.e.n. Philoceus din Farent: „*Numărul, ca și armonia, nu admite falsitatea, aceasta le este lor cu totul străină …, adevărul este înnăscut și specific naturii numărului*“.

Arina: O fi așa numărul, dar eu mă uit la oameni!

ARINA ESTE FERICITĂ!

Arina a câștigat concursul și va pleca, luna viitoare, în țara lui Carroll Lewis și a lui Isaac Newton.

Au fost șase luni de efort, de frământări și, firește, de satisfacții. A citit atâtea lucrări fascinante, a disecat atâtea probleme aparent insolubile, și-a pus nenumărate întrebări și a înțeles multe despre matematicieni și despre mentalitatea lor.

Acum așteaptă cu nerăbdare să ajungă la British Museum ca să vadă și alte comori ale matematicii. Visează să găsească mai multe informații inedite despre matematicianul britanic Alan Mathison Turing (1912-1954), magician al descifrării codurilor și creator al inteligenței artificiale.

E convinsă că acest concurs i-a marcat în mod fericit destinul, că va face studii aprofundate de matematică superioară, care-i vor permite să abordeze unele dintre cele mai nepătrunse taine ale acestei științe date omului pentru a întreprinde, a se minuna și a atinge sublimul.

INDEX DE TERMENI

A

Abac (< fr. abaque; < lat. abacus) – dispozitiv pentru calcule aritmetice, format dintr-un cadru prevăzut cu vergele orizontale, fiecare vergea având zece bile culisante.

Absurd – sinonim, în matematică, pentru contradictoriu, fals din punct de vedere logic. Demonstrația unei propoziții P prin reducere la absurd, admițând ca adevărată propoziția contrară (non-P), constă în obținerea unui rezultat care neagă una dintre ipoteze. În concluzie, propoziția non-P nu este adevărată, iar propoziția P este adevărată.

Vezi și: **Terț exclus**.

Algoritm (< fr. algorithme, după numele matematicianului arab al-Kharezmi) – șir finit de reguli care rezolvă o clasă de probleme guvernate de aceleași prescripții și deosebindu-se între ele numai prin datele inițiale. În sensul curent al acestui termen, o formulă este un algoritm (de exemplu, formula soluțiilor ecuației de gradul doi).

Analiză matematică – parte a matematicii care cuprinde teoria funcțiilor relativă la structuri și la calcule legate de noțiunile de limită și continuitate.

Vezi și: **Calcul infinitezimal**.

B

Bază de numerație a unui sistem – numărul de simboluri folosite într-un sistem de numerație: 2, 8, 10, 16, 20, 60 etc.

C

Calcul diferențial – parte a matematicii care tratează proprietățile locale ale funcțiilor, comportarea lor la variații infinit mici ale variabilelor.

Vezi și: **Ecuație cu derivate parțiale**; **Ecuație diferențială**.

Calcul infinitezimal – parte a matematicii care cuprinde, în principal, calculul diferențial și calculul integral, bazată pe studiul infinitelor mici și al limitelor.

Vezi și: **Calcul diferențial**; **Calcul integral**.

Calcul integral – ansamblul metodelor și algoritmilor de calcul al primitivelor, al integralelor și de rezolvare a ecuațiilor diferențiale.

Ciur – algoritm prin care se obține lista unor numere având o proprietate precisă (**Ciurul lui Eratostene**, pentru numere prime).

Completitudine – proprietate generală a unui sistem axiomatic potrivit căreia din axiomele respectivului sistem pot fi deduse, cu ajutorul regulilor de deducție, toate teoremele sistemului. În sens strict, completitudinea presupune existența în cadrul sistemului axiomatic a unui procedeu formal de respingere din sistem a oricărei expresii care nu este axiomă sau teoremă a sa.

Congruență – relația dintre două numere întregi, a și b, care dau același rest la împărțirea cu același număr întreg dat n, numit modul: $a \equiv b(n)$ Exemplu: $22 \equiv 4(3)$.

Conjectură – ipoteză privind exactitatea sau inexactitatea unui enunț căruia i se ignoră demonstrația.

Consistență – calitate a unui sistem axiomatic de a nu conține o formulă oarecare în același timp cu negația ei.

Vezi și: **Contradictoriu**; **Completitudine**.

Contradictoriu – teorie matematică ale cărei axiome permit să se demonstreze o teoremă, precum și negația ei.

Convergent – un șir sau o serie care tinde spre o limită finită când variabila tinde spre infinit.

E

Ecuație algebrică – ecuație de forma P(x)=0, unde P desemnează un polinom.

Ecuație cu derivate parțiale – ecuație în care necunoscuta este o funcție de mai multe variabile care intervine prin derivatele ei parțiale de ordin oarecare.

Ecuație diferențială – ecuație de tipul $F(x, y, y', ... y^n) = 0$, în care necunoscuta y este o funcție diferențială.

Ecuație diofantică – ecuație de forma P(x, y, z, ...) = 0, unde P este un polinom cu coeficienți în Z sau Q, căruia i se caută soluții în Z sau Q.

Ecuație trigonometrică – ecuație în care necunoscutele figurează prin funcții trigonometrice (sin x, cos x, tg x etc.).

Expresii inconsistente – „negații" ale expresiilor valide; sunt excluse din alcătuirea unui sistem axiomatic.

F

Formalism – sistem de reguli și propoziții matematice potrivit căruia toate formele permise ale raționamentului matematic dintr-un domeniu specific, care includ și apelează la raționamente asupra mulțimilor infinite, trebuie să poată fi descrise univoc.

Vezi și: **Sistem formal**.

Funcție – corespondența dintre elementele unei mulțimi X și elementele unei mulțimi Y. Dacă se notează legea de corespondență prin f, iar prin x un element din X, elementul din Y, care corespunde prin această lege lui x, se notează f(x); f(x) reprezintă valoarea funcției pentru elementul x, care se numește variabilă independentă.

G

Geometrie algebrică – ramură a geometriei care se ocupă de varietăți definite prin ecuații algebrice; studiază curbe algebrice, suprafețe algebrice, transferuri algebrice ș.a.

Vezi și: **Varietate**.

Geometria lui Riemann – geometrie fundamentată pe un sistem de axiome în care postulatul paralelelor lui Euclid este înlocuit printr-o axiomă care cere ca printr-un punct exterior la o dreaptă să nu se poată duce nici o paralelă la această dreaptă. Un model de geometrie a lui Riemann îl constituie geometria suprafeței sferei pe care cercurile mari sunt considerate drepte.

I

Inducție matematică – procedeu de demonstrare a propozițiilor generale în matematică printr-un raționament generalizator în maniera științelor experimentale, care a dus, adesea, la concluzii greșite. Raționamentul prin recurență, denumit în mod impropriu inductiv, este însă valabil, fiind, de fapt, o deducție.

Infinit mare – funcția numerică de valoare reală, notată f(x), definită în vecinătatea valorii x_0 a variabilei independente, astfel că atunci când aceasta tinde spre x_0 valoarea absolută a lui f(x) tinde spre infinit.

Infinit mic – funcția numerică de variabilă reală, notată f(x), definită în vecinătatea lui x_0, astfel că dacă x tinde spre x_0, f(x) tinde spre zero.

Integrală definită a unei funcții f(x) definită pe intervalul [a, b] – limita sumei elementelor infinitezimale $f(x_n)dx$ cuprinse între curba reprezentativă a funcției, abscisă și ordonatele punctelor a și

b de pe abscisă. Numărul obținut la limită este aria mărginită de mărimile geometrice menționate.

Integrală nedefinită (primitivă) – funcția integrală g(x) a funcției f(x) în care limita superioară de integrare, b, este înlocuită cu variabila independentă x: $g(x) = \int_a^x f(t) \cdot d(t)$

L

Limită a unui șir – numărul a (finit sau infinit) care are proprietatea că în afara oricărei vecinătăți a lui se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului a_n.

Logaritmul unui număr dat – puterea la care trebuie să fie ridicat un număr pozitiv numit bază pentru a se obține numărul dat.

Lunulă (< fr. lunule) – figură geometrică formată din două arce de cerc, de diametre diferite, care au aceleași extremități și a căror convexitate este situată de aceeași parte a centrelor respective.

M

Medie armonică – reciproca mediei aritmetice a reciprocelor mărimilor pozitive considerate.

Medie axiomatică – metodă științifică de expunere care, pornind de la propoziții prime (axiome), deduce din acestea, pe bază de reguli formulate explicit, noi propoziții, numite teoreme. Se numește **formală** atunci când termenii nedefiniți sunt încă neinterpretați, trecerea de la axiome la teoreme realizându-se prin simpla aplicare a procedeelor de calcul.

Medie geometrică – este egală cu rădăcina de ordinul n din produsul celor n mărimi pozitive considerate.

Mulțime – totalitatea obiectelor numite elemente, dată fie prin indicarea acestora, fie prin enunțarea unei caracteristici comune lor. Poate fi:

- **finită** – conține un număr finit de elemente;
- **infinită** – conține un număr infinit de elemente;
- **numărabilă** – elementele ei pot fi puse în corespondență biunivocă cu elementele mulțimii numerelor naturale (1, 2, 3...);
- **vidă** – nu conține nici un element.

N

Numărabil – Mulțime echivalentă cu o parte a mulțimii numerelor naturale N.

Număr algebric – rădăcină a unei ecuații algebrice care are drept coeficienți numere raționale.

Număr cardinal – număr din șirul numerelor naturale 1, 2, ... care precizează din câte unități este compus numărul, poziția lui în șir, numărul lui de ordine (numărul ordinal).

Număr de Aur (**Divina Proporție**) – număr egal cu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aproximativ 1,618, corespunzând unei proporții cu deosebire estetice.

Număr perfect – numărul egal cu suma factorilor în care se descompune.

Număr prim – număr natural diferit de 0 care admite ca divizori numai pe 1 și pe sine însuși.

Număr transcendent – număr irațional care nu este rădăcina nici unei ecuații algebrice cu coeficienți rationali.

Numerație – sistem de reguli pentru exprimarea vorbită și scrisă a numerelor întregi.

Numere inverse (**reciproce**) – două numere al căror produs este egal cu unitatea (de exemplu: x și 1/x).

Numere pitagorice – trei numere naturale, prime între ele, care satisfac teorema lui Pitagora ($a^2 + b^2 = c^2$). Triunghiul construit din laturi proporționale cu numere pitagorice este dreptunghic.

Numere prime gemene – cuplu (p, q) de numere prime, astfel că q = p + 2. Nu se știe, în prezent, dacă mulțimea lor este finită (a opta problemă a lui Hilbert). Se cunoaște, însă (teorema lui V. Brum) că seria $\sum 1/p$, în care p descrie mulțimea numerelor prime gemene, este convergentă.

P

Perioadă – cel mai mic număr T > 0, cu proprietatea f(x + T) = f(x). Dacă există un T cu această proprietate, funcția f(x) se numește periodică de perioadă T. De exemplu: *sin x* este periodică de perioadă 2π, fiindcă *sin* $(x + 2\pi) = \sin x$.

Proporție – două rapoarte egale $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ formează o propoziție. Într-o proporție, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor: $bc = ad$.

S

Secțiune de Aur – mod de împărțire a unui segment de dreaptă AB printr-un punct M, astfel încât $AM^2 = AB \cdot MB$. Denumirea anterioară a acestei proporții a fost **medie** și **extremă rație**.

Serie – șir infinit de elemente legate între ele prin semnul plus, $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ Elementele $u_1, u_2, ... u_n, ...$ se numesc **termenii seriei**, care pot fi numere reale sau complexe, funcții, vectori, matrice etc. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ se numește suma parțială a seriei.

Seria pentru care șirul sumelor parțiale $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ este convergent se numește o serie convergentă. Limita șirului sumelor parțiale este suma seriei. Seria pentru care șirul numerelor parțiale nu are limită sau limita este $\pm\infty$ (de exemplu, seria armonică $1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}+.....$) este o serie divergentă.

Serie alternată – serie în care doi termeni consecutivi oarecare sunt de semne contrarii.

Seria de funcții – serie ai cărei termeni u_n sunt funcții $f_n(x)$ definite pe un domeniu A.

Serie trigonometrică – serie de funcții de forma:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Sistem formal – sistem de semne și expresii construite în conformitate cu anumite reguli de formare și de derivare, în care se face abstracție de orice interpretare a semnelor (dimensiunea semantică) și de raporturile acestora cu subiecții ce le folosesc (dimensiunea pragmatică).

Sistem sexagesimal – sistem de numerație cu baza 60. Se folosește, de exemplu, pentru măsurarea unghiurilor și arcelor.

T

Terț exclus – principiu fundamental al gândirii, care impune distincția netă între adevăr și fals. Strâns legate de legea terțului exclus sunt legea dublei negații – deoarece a nega unul dintre termenii disjuncției (termenul afectat de negație) înseamnă a reveni la celălalt termen – și demonstrația prin absurd, deoarece și aceasta presupune că, prin negarea falsului, revenim în mod necesar la adevăr.

Topologie – ramură a matematicii care studiază proprietățile mulțimilor de puncte ce sunt invariante față de transformările biunivoce și bicontinue (topologice). Dacă mulțimea de puncte A este imaginea mulțimii B printr-o aplicație topologică, spunem că A și B sunt mulțimi topologice echivalente sau homeomorfe. De exemplu, cercul, elipsa, pătratul pot fi deformate una într-alta în mod continuu.

V

Variabilă – simbol indicând un element oarecare din domeniul de definiție al unei funcții. Când studiem o funcție $f(x_1,... x_n)$, spunem că x_i sunt variabile ale funcției f.

Varietate – generalizarea în mai multe domenii ale matematicii a noțiunilor de curbe, suprafețe sau volume.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

ANDREI, NICULAE. *Dicționar etimologic de termeni științifici*. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1987.

ARNOLDEZ, R.; MASSIGNON, L.; JUSKEVICI, A.P. *Aritmetica la arabi*. În: *Istoria generală a științei,* vol. I, București, Editura Științifică, 1970, p. 476-482.

BABELON, JEAN. *Mayas d'hier et d'aujourd'hui,* Paris, 1967.

BARROIS, A.G. *Manuel d'archéologie biblique,* vol. II, Paris, Picard, 1953. p. 316-339.

BINDEL, E. *Les éléments spirituels des nombres*, Paris, Payot, 1960.

BURADA, TEODOR T. *Despre crestăturile plutașilor pe cherestele și alte semne doveditoare de proprietăți la români,* Iași, 1880.

CAJORI, FLORIANA. *History of mathematical notations,* vol. I-II, Chicago, London, The Open Court Publishing Company, 1928.

CÂMPAN, FLORICA T. *Din istoria câtorva numere de seamă*, București, Editura Albatros, 1973.

CÂMPAN, FLORICA T. *Povestea numărului* π *,* ediția a II-a, București, Editura Albatros, 1977.

CÂMPAN, FLORICA T. *Povești despre numerele măiestre,* București, Editura Albatros, 1981.

CHAMBORCHE, FRANÇOIS–XAVIER. *Vie et mystique des nombres,* Paris, 1976.

CHEVALIER, JEAN; GEENBRANT, ALAIN. *Dicționar de simboluri,* vol. I-III, București, Editura Artemis, 1995.

DINU, MIHAI. *Comunicarea. Repere fundamentale,* București, Editura Științifică, 1997.

ELIADE, MIRCEA. *Istoria credințelor și ideilor religioase,* ediția a II-a, vol. I-III, București, Editura Științifică, 1991.

FILLIOZAT, J. *Matematica [indiană]*. În: *Istoria generală a științei,* vol. I, p. 170-175

GHYKA, MATHILA. G. *Le nombre d'or,* vol. I-II, Paris, Gallimard, 1931.

GHYKA, MATHILA G. *Philosophie et mystique des nombres*, Paris, 1952.

GUITEL, GENEVIÈVE. *Histoire comparée des numérations écrites,* Paris, Payot, 1975.

IDEL, MOSHE. *Cabala. Noi perspective,* București, Editura Nemira, 2000.

LABAT, R*;* BRUENS, E.M. *Aritmetica* [în Mesopotania]. În: *Istoria generală a științei,* vol. I, p. 108-144.

LAUTMAN, ALBERT. *La répartition des nombres premiers et la mesure de la croissance à infini.* În: *Essai sur l'unité des mathématiques*, Paris, Union Générale d'Éditions, p. 221-225.

LOI, MAURICE. *Le nombre d'or.* În: *Mathématiques et art,* Paris, Hermann, 1995, p. 11-14.

MARCUS, SOLOMON. *Three*. In: *Semiotics around the world Synthesis in Diversity Proceedings of the Fifth Congress of the International Association for Semiotic Studies, Berkley,* Berlin, New York, Marton de Gruyer, 1994, p. 773-776.

MICHEL, P.H; MUGLER, CH. *Aritmetica și geometria* [la greci]. În: *Istoria generală a științei,* vol. I, p. 230-236.

MOISIL, GRIGORE C. *Teorema lui Pitagora*. În: *Grigore C. Moisil. Un profesor ca oricare altul,* București, Editura Tehnică, 1998, p. 61-63.

NEVEUX, MARGUERITE. *Le nombre d'or chez Seurat?* În: *Mathématiques et art,* Paris, Hermann, 1995, p. 187-196.

OYSTEIN, ORE. *Number Theory and History,* New York, Mc. Graw – Hill Book Company, 1948.

POPA, ILIE. *Începuturile matematicii românești,* În: Eliza Roman. *Bibliografia matematicii românești.* București, Editura Academiei, 1972, p. XLI-LXII.

ROMAN, ELIZA. *Bătrânul număr, veșnic tânăr*. În: „*Contemporanul"*, 27 august 1997, p. 1, 11.

ROMAN, ELIZA. *Buclucuri matematice*. În: „*Contemporanul"*, 10 aprilie 1996, p.1, 11.

ROMAN, ELIZA. *Din istoricul manualului românesc de matematică în secolele 17-19*. În: „*Gazeta matematică"*. București, I (1980), p. 169-173; II (1981), p. 30-39.

ROMAN, ELIZA. *Impactul unui număr*. În: „*Contemporanul"*, 8 octombrie 2001, p. 15.

ROMAN, ELIZA. *Numărul între mitologie și realitățile contemporane. În:* „*Contemporanul"*, 1 ianuarie 1983, p. 4.

ROMAN, ELIZA. *Și giganții greșesc.* În: „*Contemporanul"*, 21 noiembrie 1996, p. 1, 11.

SMITH, DAVID EUGENE. *History of Matematics*, vol. I-II, New York, Dover Publications, 1958.

STRESNER, PEAN, G. *Numerația și astronomia la precolumbieni*. În: *Istoria generală a științei,* vol. I, p. 432-441.

ȘAFRAN, ALEXANDRU. *Înțelepciunea Cabalei.* București, Editura Hasefer, 2000.

TOTH, ALEXANDRU. *Apariția și răspândirea cifrelor în Țările Române.* București, Editura Tehnică, 1972.

VERCOUTLER. J. *Aritmetica egipteană*. În: *Istoria generală a științei,*.vol. I, București, 1970, p. 30-43

VIROLLERAUD, CH.; SCAHEFFER Cl. FA. *Matematica ebraică veche*. În: *Istoria generală a științei*, vol. I, p. 144-153.

„Locul numărului în civilizație îmi trezește o idee: n-ar trebui, oare, să punem puterea calculatorie a omului la un loc cu puterea de energie instalată, în definirea capacității unei societăți de a fi parte din civilizația globală? Arina mă corectează: pe lângă că ideea îi desemnează un rol nou, ea e atrasă de număr pentru aura sa de mister ce trebuie lămurită. S-a inventat, oare, un joc mai fascinant și mai captivant care să dea emoții egale cu ale poeziilor sau melodiilor celor mai extaziante? Ca și ele, jocul numerelor are ceva miraculos, pasionant, irezistibil. Îi mulțumesc cu căldură ei, autoarei și editorului pentru călătoria inspirată“.

Acad. MIRCEA MALIȚA

ISBN 978-973-8238-23-7